MATEMÁTICA

Módulo 1

Unidades 5 e 6

Pág. 31
Unidade 5

Polígonos: as faces dos poliedros Observe as imagens a seguir e tente perceber o que elas têm em comum:

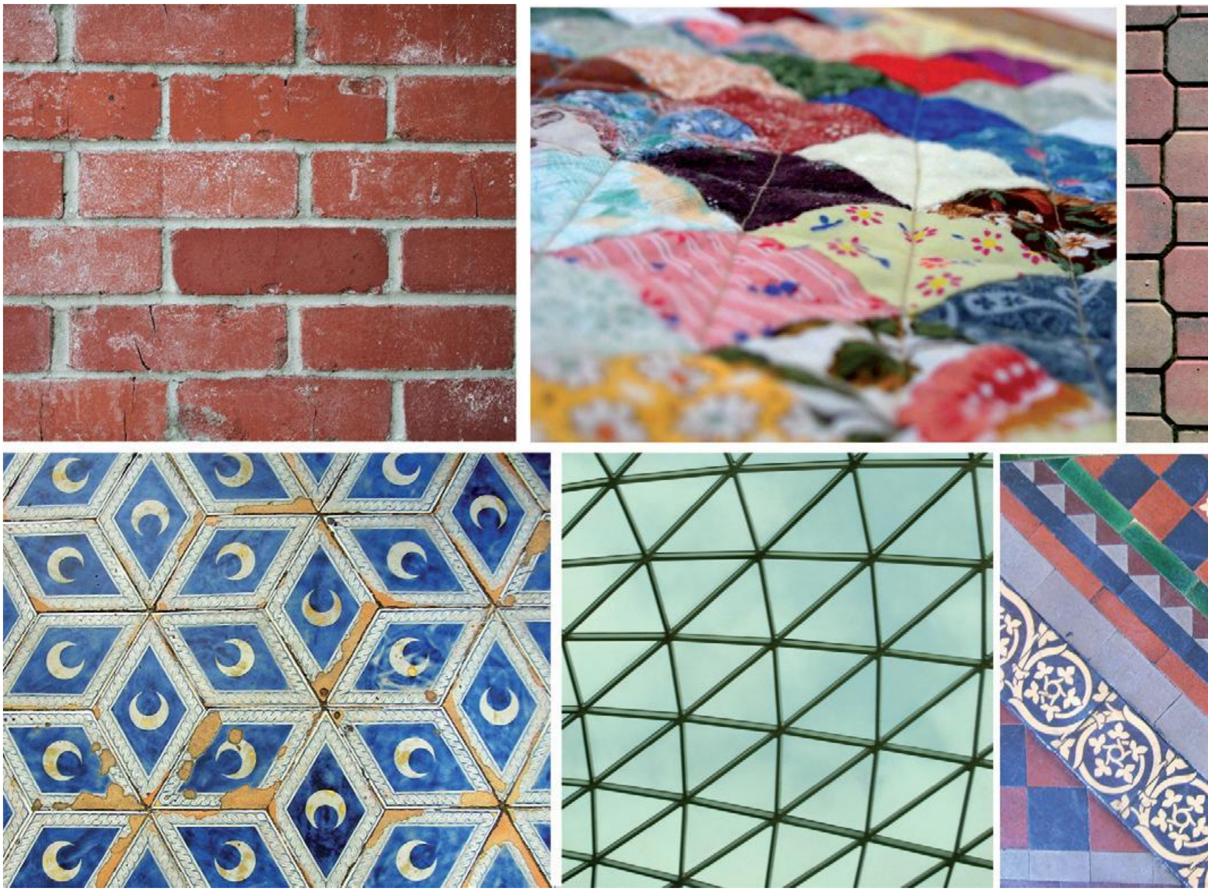


Figura 1: O que uma colcha de retalhos, ladrilhos diversos, tijolos e estruturas de construção têm em comum? Será que a Matemática está por trás disso?

As imagens apresentadas mostram diversas combinações de figuras que lembram retângulos, triângulos, quadrados entre outras. O uso dessas combinações ou padrões é um recurso empregado na construção civil, na decoração de pisos e paredes, no artesanato, na arte e em diversas outras situações da nossa vida cotidiana.

Pág. 31

No entanto, pavimentar ou ladrilhar superfícies dessa maneira não é uma tarefa simples! Nem todas as combinações de polígonos prestam-se para encher uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições.

Observe, por exemplo, a tentativa de ladrilhamento feita com peças com oito lados.

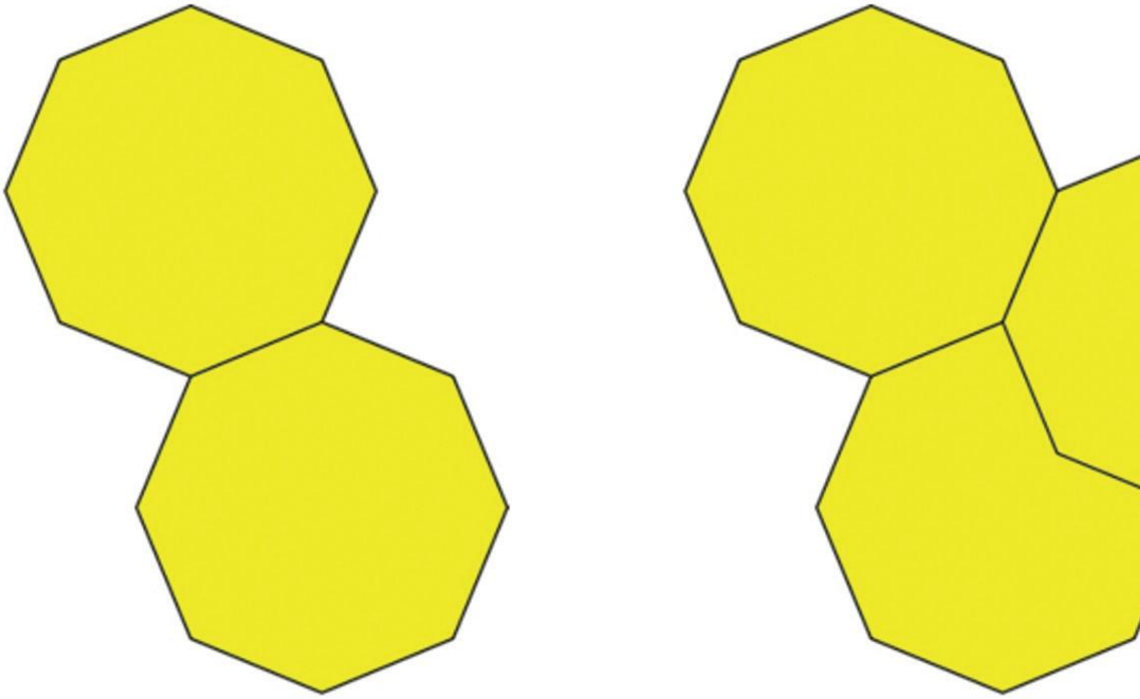
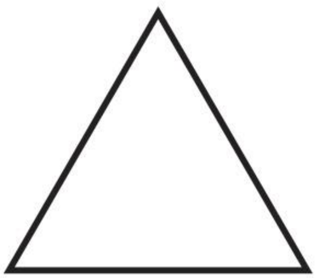
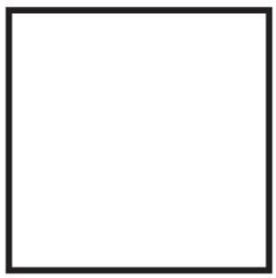
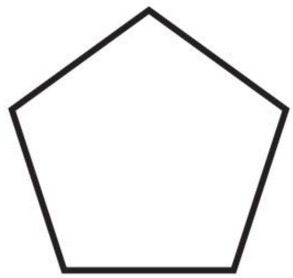


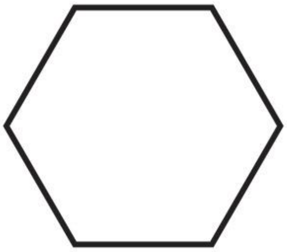
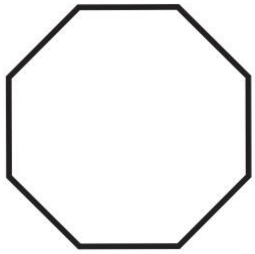
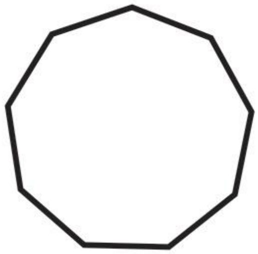
Figura 2: Seria possível ladrilhar um piso plano apenas com peças de oito lados?

Veja que as peças sobrepõem-se, ou seja, não é possível fazer-se ladrilhamentos, utilizando apenas esse tipo de peça.

Assim, temos um problema. Imagine que precisamos ladrilhar um piso e temos apenas peças octogonais (com oito lados). Se você fosse um arquiteto ou um construtor como procederia para resolver essa situação?

Uma alternativa seria utilizar outro formato de ladrilho para fazer o encaixe, em vez de deixar espaços vazios ou fazer sobreposições de peças. Veja, na tabela a seguir, outros tipos de ladrilhos, com diferentes formatos:

Triângulo	Quadrado	Pentágono
		

Hexágono	Octógono	Eneágono
		

Qual deles você escolheria para realizar o encaixe junto aos ladrilhos octogonais? Por quê?

Pág. 33

Nesta unidade, você estudará as propriedades dos polígonos e aprenderá como realizar essa tarefa com base em cálculos que facilitarão a escolha. Bons estudos!

Objetivos de Aprendizagem

.Reconhecer as principais propriedades dos polígonos e utilizá-las para resolver problemas.

.Identificar o ângulo interno de um polígono.

.Realizar a soma dos ângulos internos de um polígono.

Pág. 34
Seção 1
Propriedades dos polígonos

Situação Problema 1

Os polígonos possuem propriedades importantes. Para poder falar um pouco delas, vamos fazer uma proposta. A seguir há duas sequências de figuras. Na primeira delas, todos são polígonos e na segunda não.

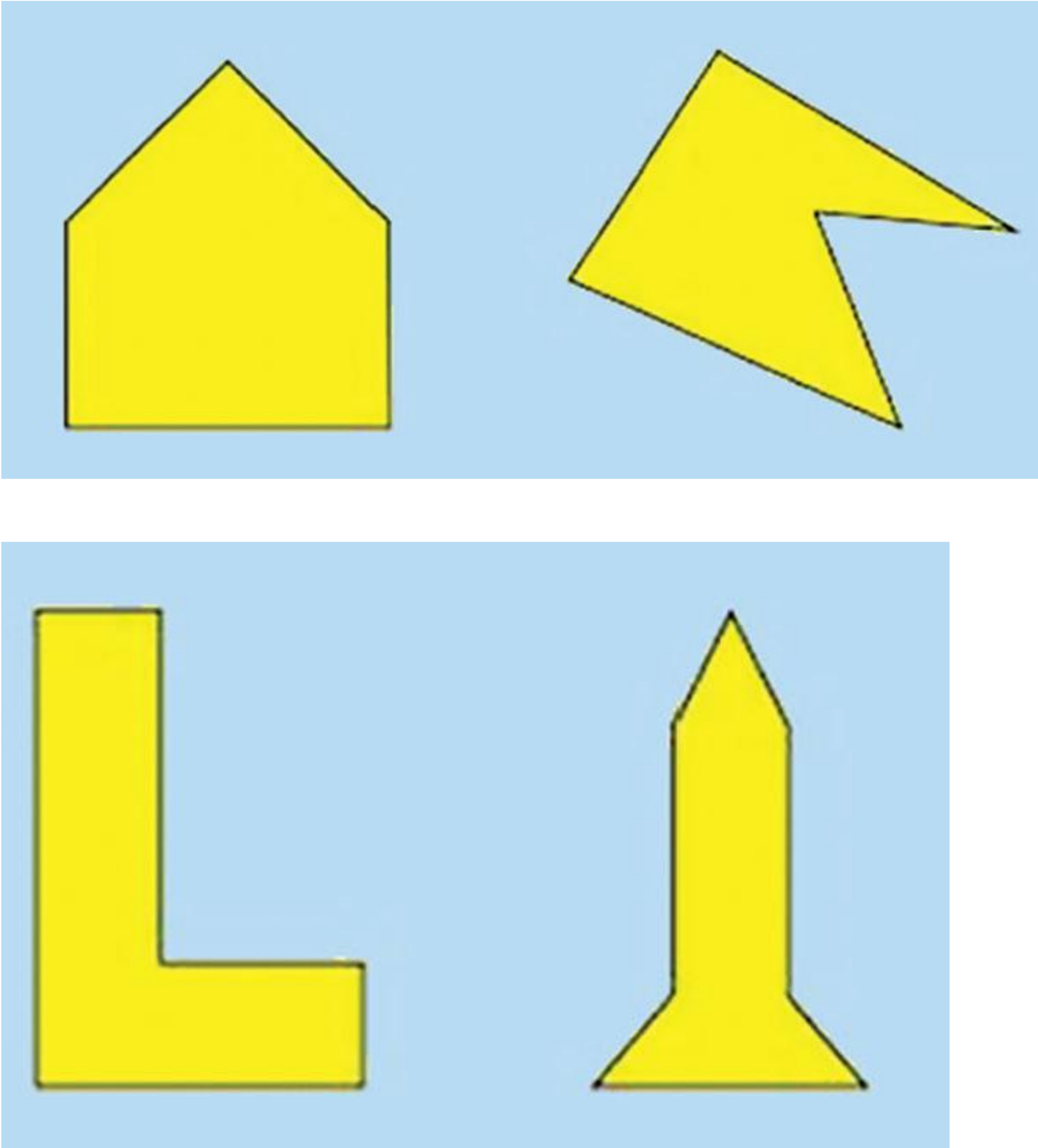


Figura 3: Exemplos de polígonos.

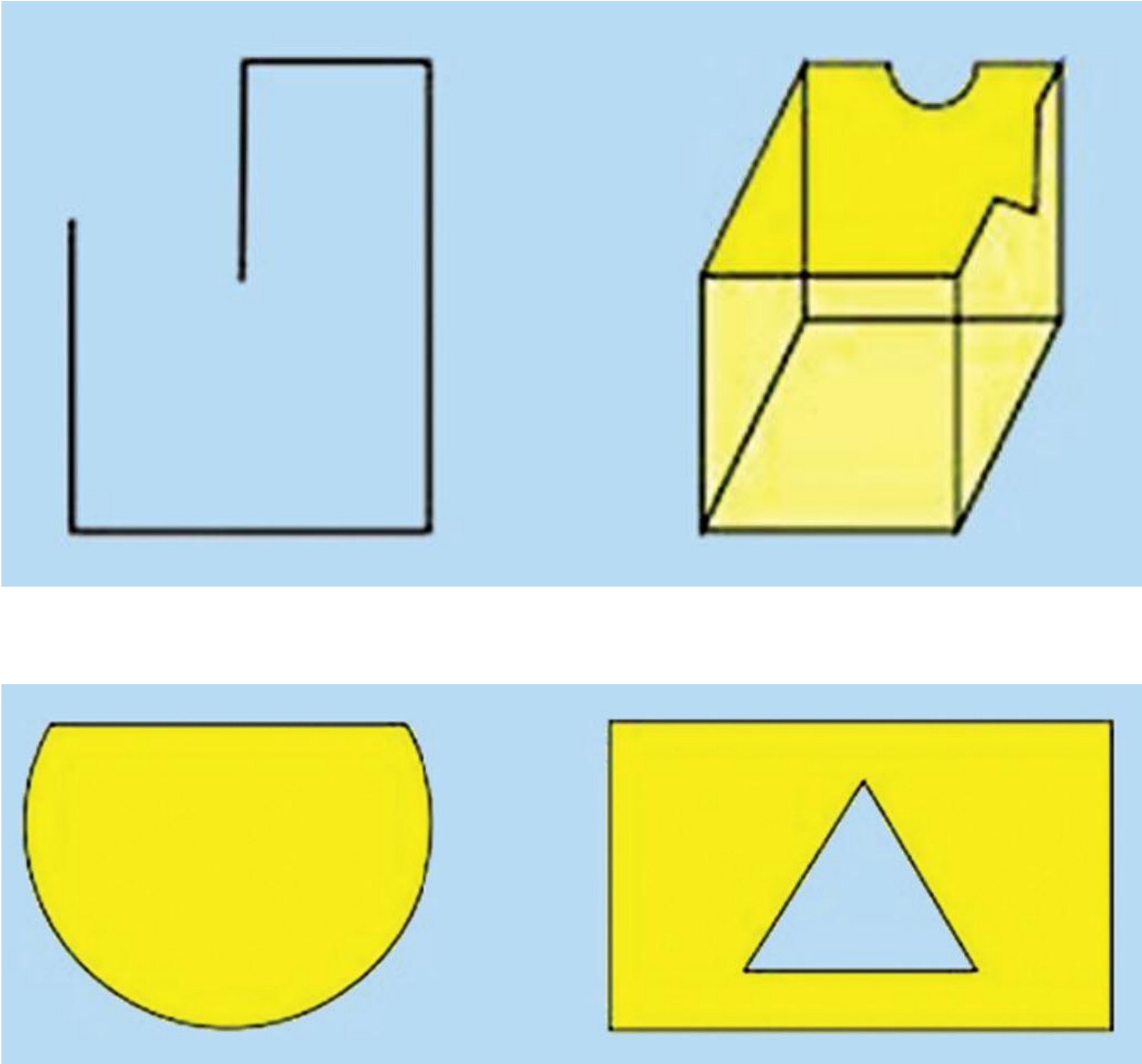


Figura 4: Exemplos de figuras que não são polígonos.

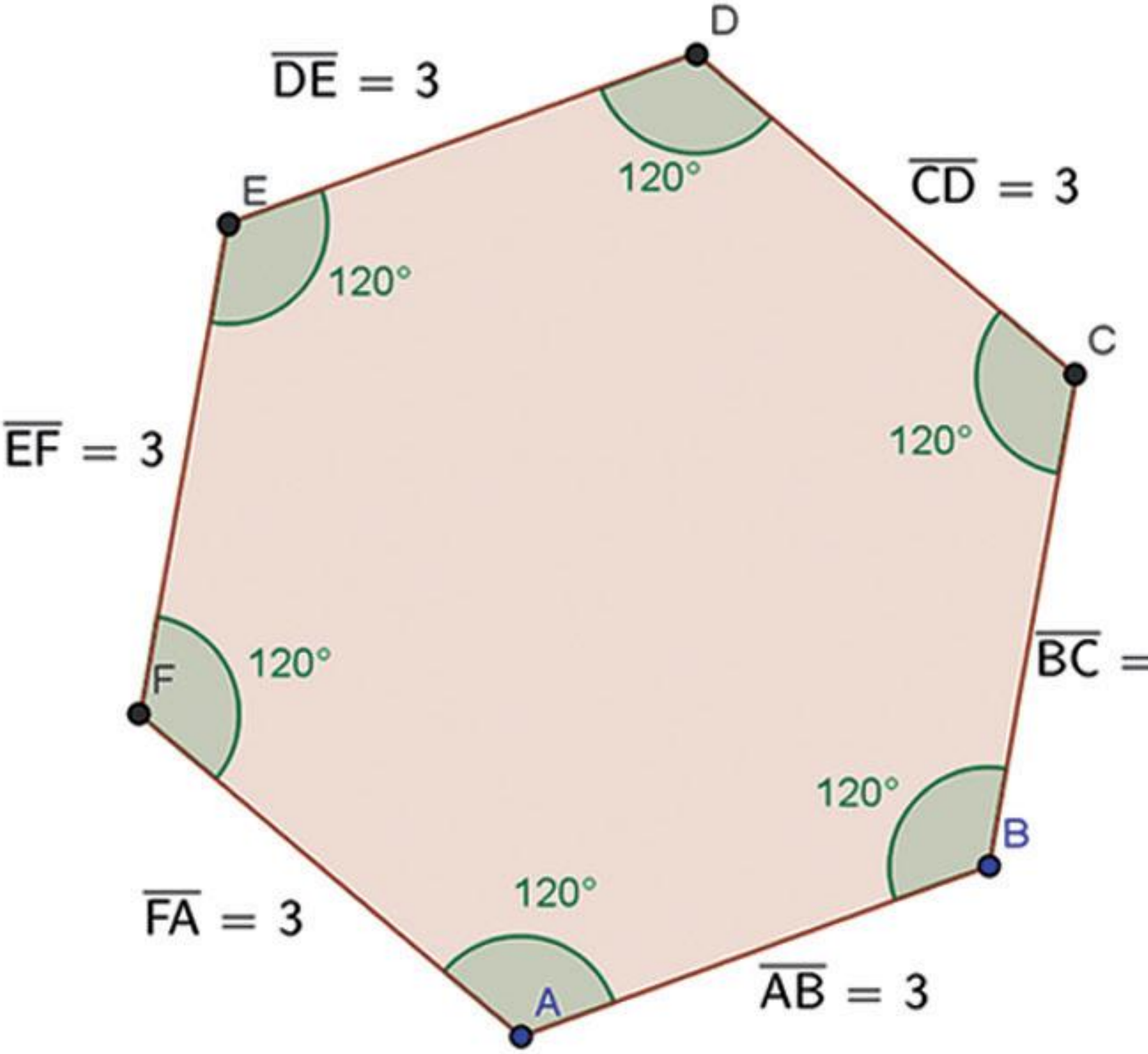
Atividade
Observe os desenhos acima, compare os dois quadros e escreva as características de uma figura geométrica para que ela possa ser considerada um polígono.
******

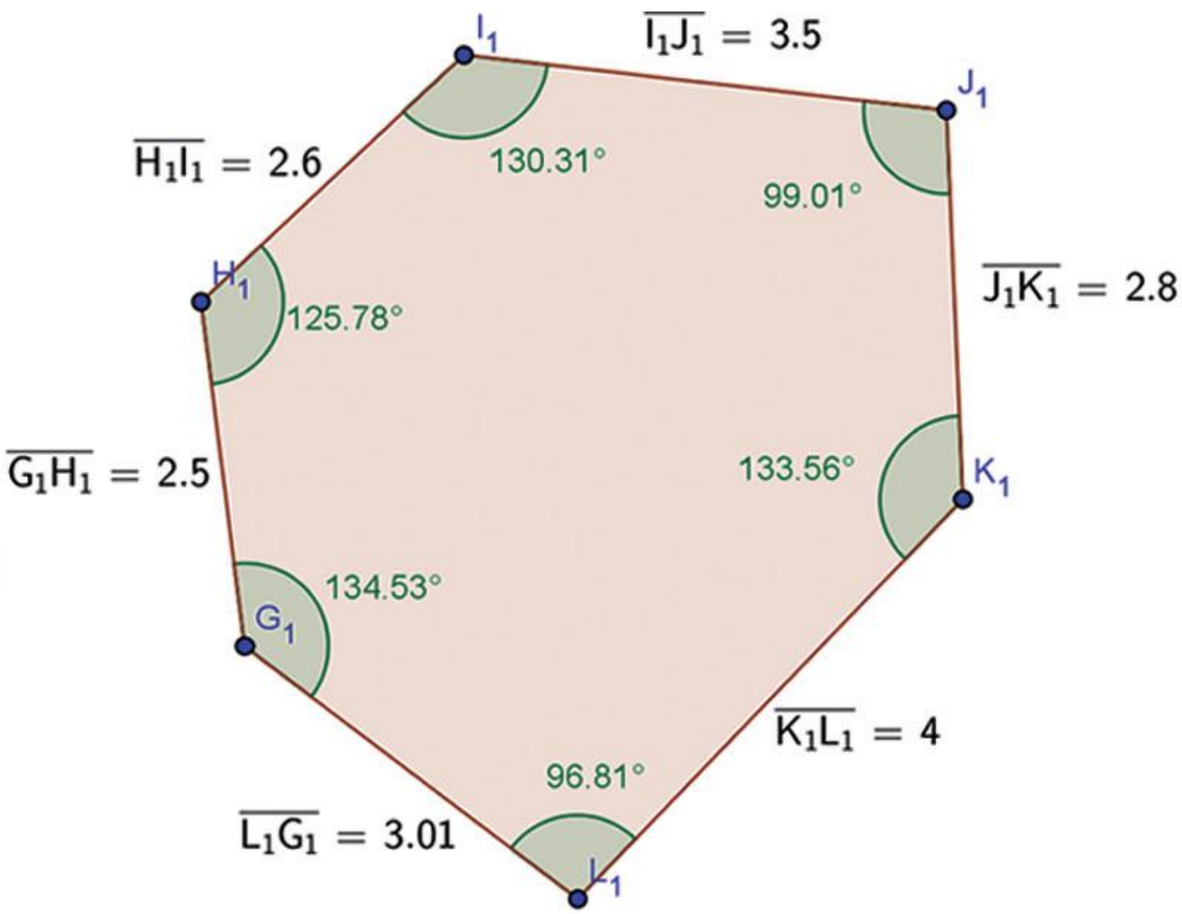
Pág. 35
Como você pode, verificar por meio de sua observação:
Importante
Polígonos são figuras planas formadas por

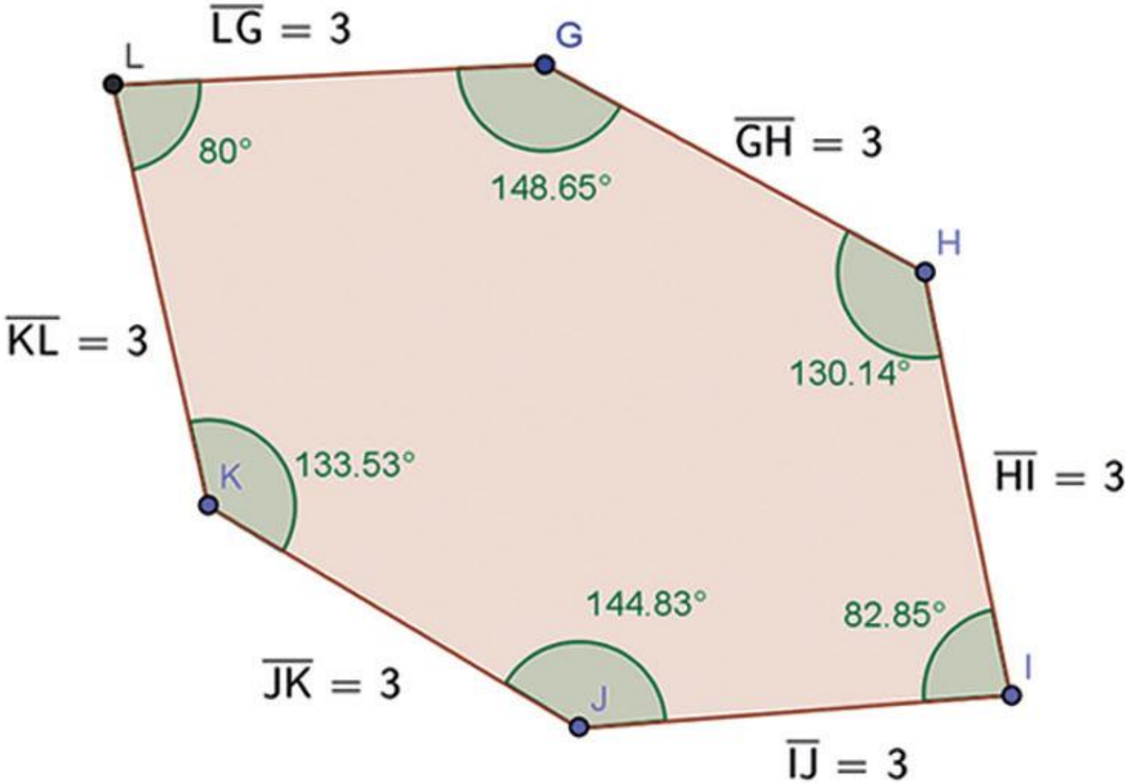
segmentos de retas sem interrupção.

Polígonos regulares são aqueles que possuem todos os lados com as mesmas medidas e todos os ângulos internos também com as mesmas medidas.

Observe os exemplos a seguir:




$\overline{I_1J_1} = 3.5$
I_1
J_1
$\overline{H_1I_1} = 2.6$
130.31°
99.01°
H_1
125.78°
$\overline{J_1K_1} = 2.8$
$\overline{G_1H_1} = 2.5$
133.56°
K_1
134.53°
G_1
$\overline{K_1L_1} = 4$
96.81°
$\overline{L_1G_1} = 3.01$
L_1



O primeiro polígono é regular, pois possui todos os lados com mesma medida (3) e todos os ângulos internos também com as mesmas medidas (120º). O segundo e o terceiro não são

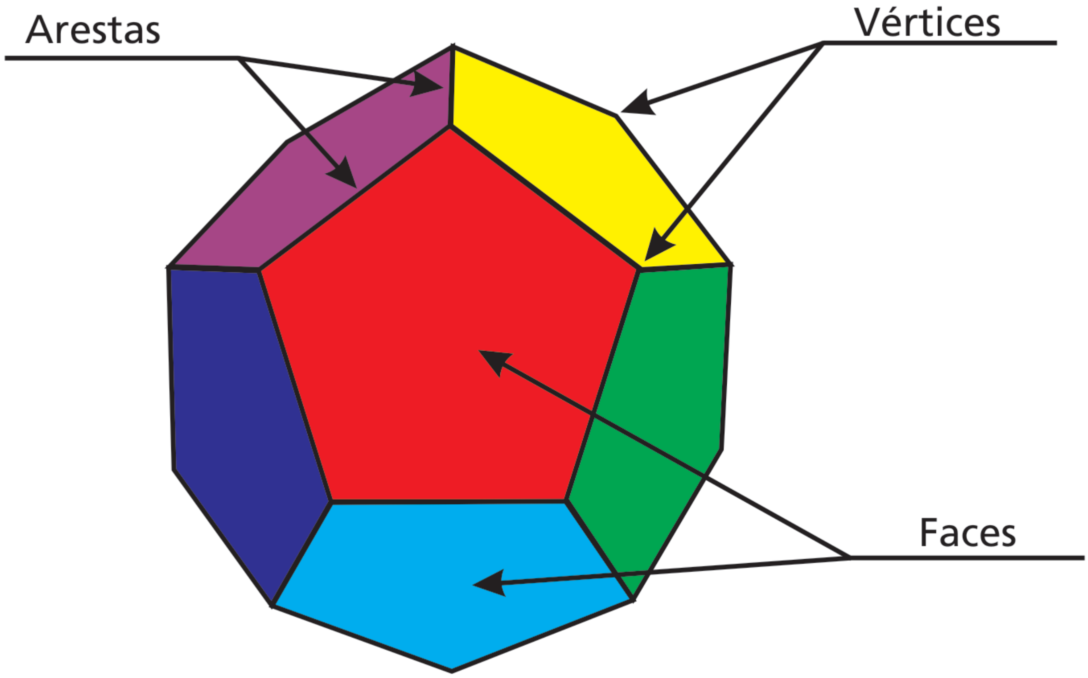
regulares, pois não atendem a essas características. Observe que o terceiro possui os lados com mesma medida, mas os seus ângulos internos são diferentes.
******

Pág. 36

Saiba Mais

As faces de um poliedro

Poliedros são sólidos cujas faces são planas. Observe a seguir um exemplo de poliedro com os seus principais elementos assinalados:



Observe que as faces dos poliedros são polígonos, ou seja, figuras planas formadas por segmentos de retas sem interrupção.

******

Seção 2 Utilizando polígonos nas artes

Observe a imagem abaixo:

Figura 5: Essa é uma reprodução de uma

litogravura famosa do artista Maurits Cornelis Escher. A obra chama-se *Répteis* e foi feita em 1943.

Pavimentar um plano é preenchê-lo completamente através do uso repetido de polígonos ou outras figuras, sem falhas nem sobreposições. Uma boa parte da obra de Escher é dedicada ao estudo das pavimentações de superfícies planas. Você consegue identificar as formas geométricas utilizadas pelo autor?

Saiba Mais

Um pouco sobre Escher

Maurits Cornelis Escher, nasceu em Leeuwarden, na Holanda, em 1898, faleceu em 1970 e dedicou toda a sua vida às artes gráficas. Cursou arquitetura na Escola de Belas Artes de Haarlem onde conheceu as técnicas de desenho e deixou-se fascinar pela arte da gravura. Este fascínio foi tão forte que levou Maurits a abandonar a Arquitetura e a seguir as Artes Gráficas. Sua obra foi inspirada pela arte árabe, pela divisão regular do plano em figuras geométricas que se transfiguram, repetem-se e refletem, pelas pavimentações. Porém, no preenchimento de superfícies, Escher substituía as figuras abstrato-geométricas, usadas pelos árabes, por figuras concretas, perceptíveis e existentes na natureza, como pássaros, peixes, pessoas, répteis etc.

******

Veja nas imagens a seguir como é a lógica do encaixe das gravuras desenhadas por Escher: Observe que há um polígono no qual ele desenha o corpo dos répteis.

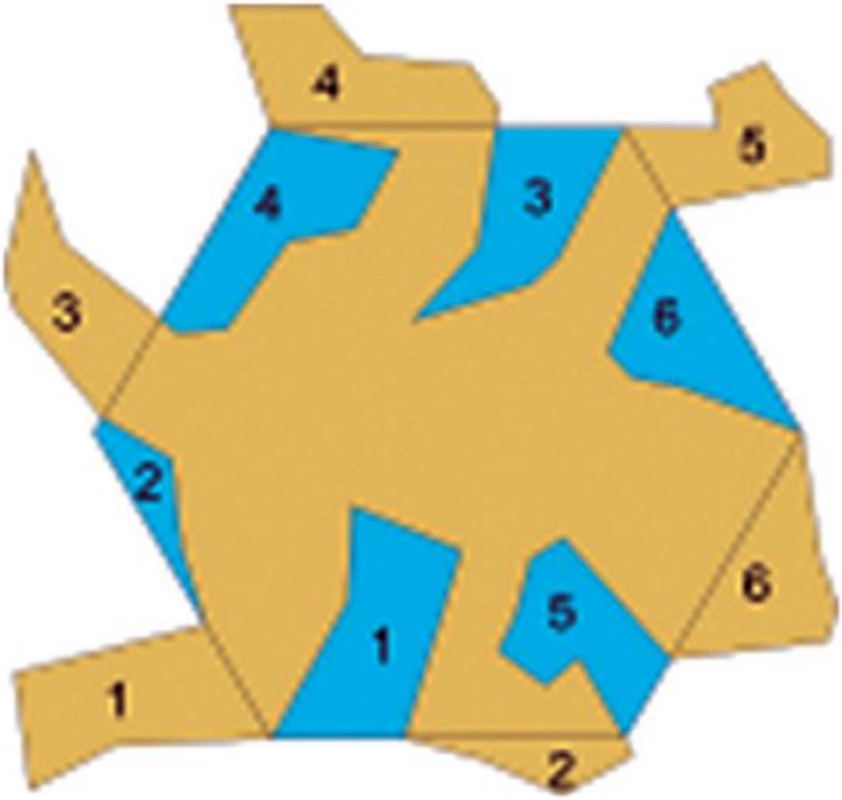


Figura 6: Polígono base para a composição da obra *Répteis*.

Veja como ficaria um ladrilhamento a partir do polígono base:

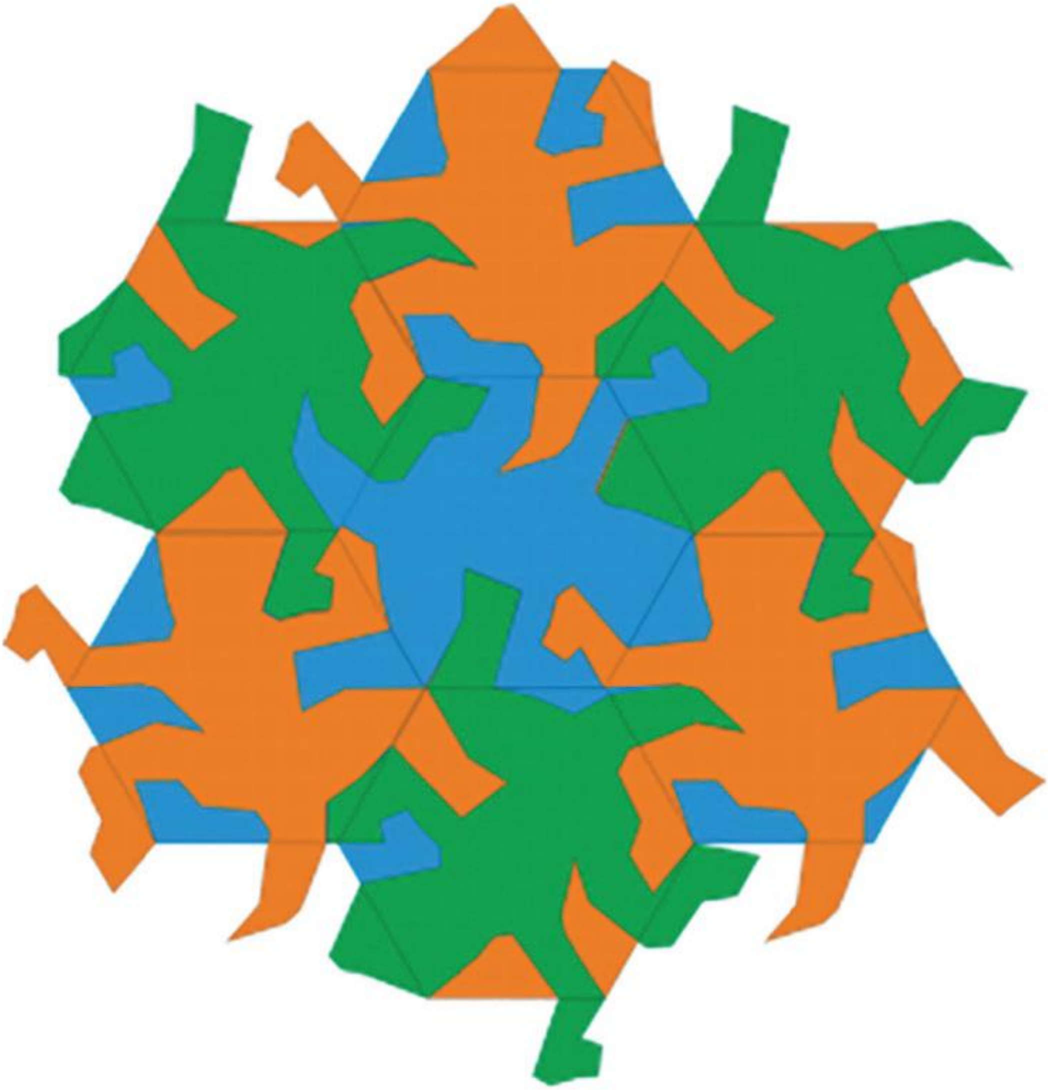


Figura 7: Ladrilhamento composto a partir do polígono base.

Pág. 38

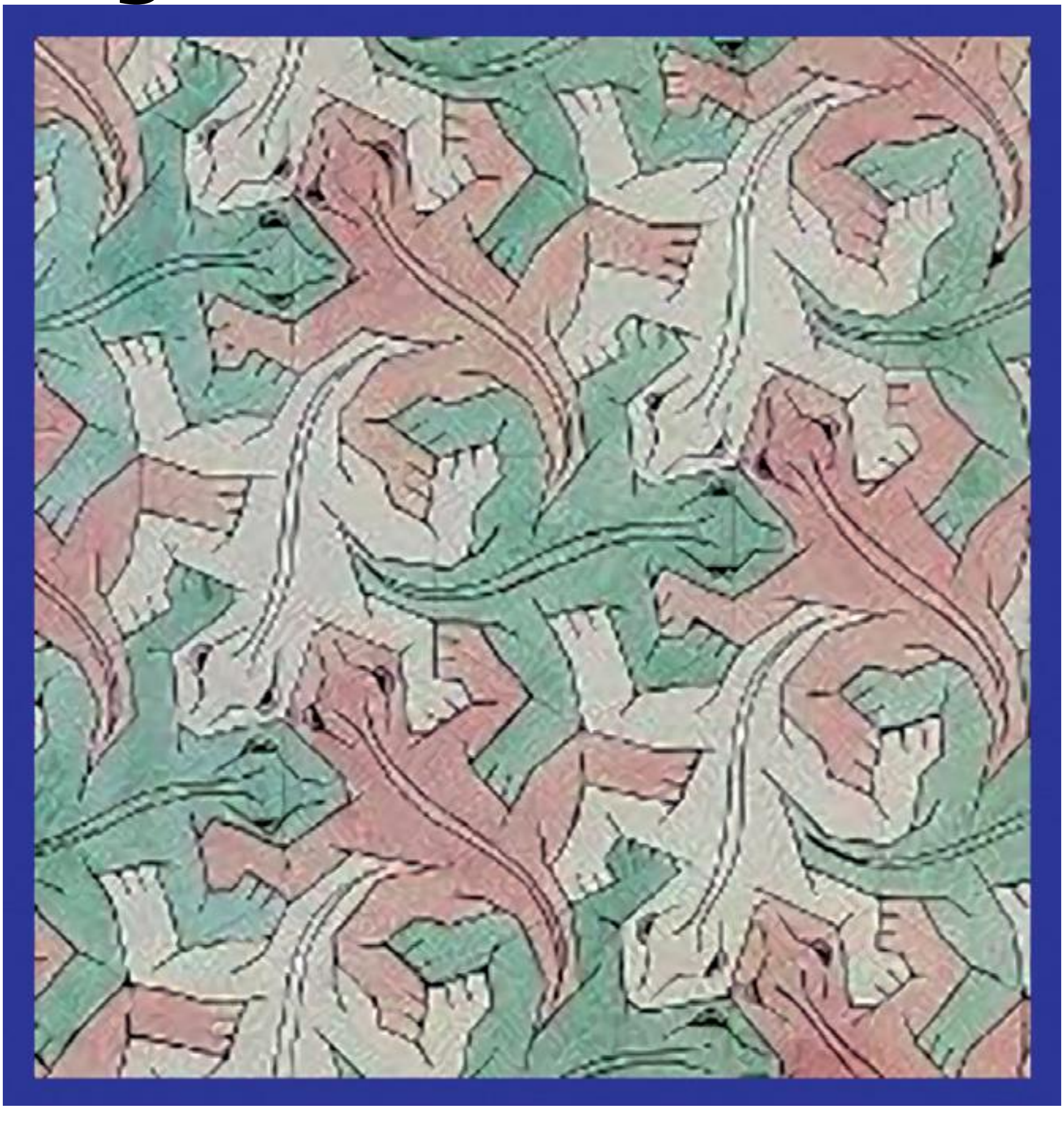
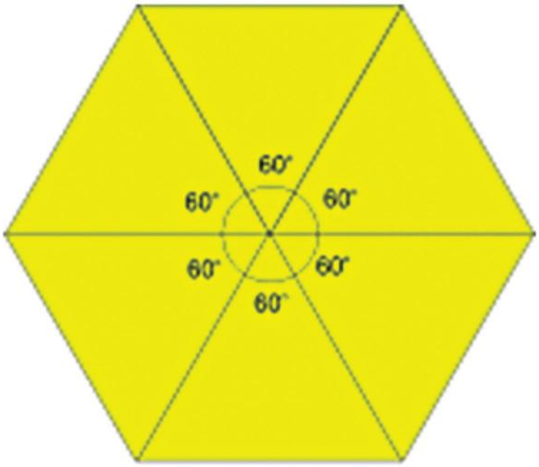
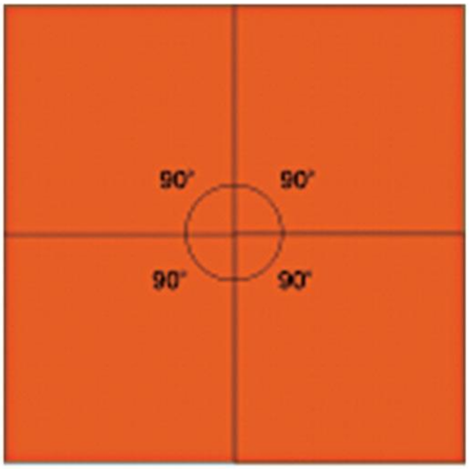


Figura 8: Após tratamento artístico, os

polígonos deixam de ser percebidos.
Para compor os répteis, Escher opta por utilizar hexágonos regulares como ponto de partida. Mas por que hexágonos regulares? Por um simples motivo. Para criar um mosaico, feito exclusivamente com polígonos regulares, ele teria somente três opções: triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares, pois somente esses três

polígonos permitem ladrilhamento ou pavimentação. Observe:

Triângulos	Quadrados
 4 x 60° = 360°	 4 x 90° = 360°

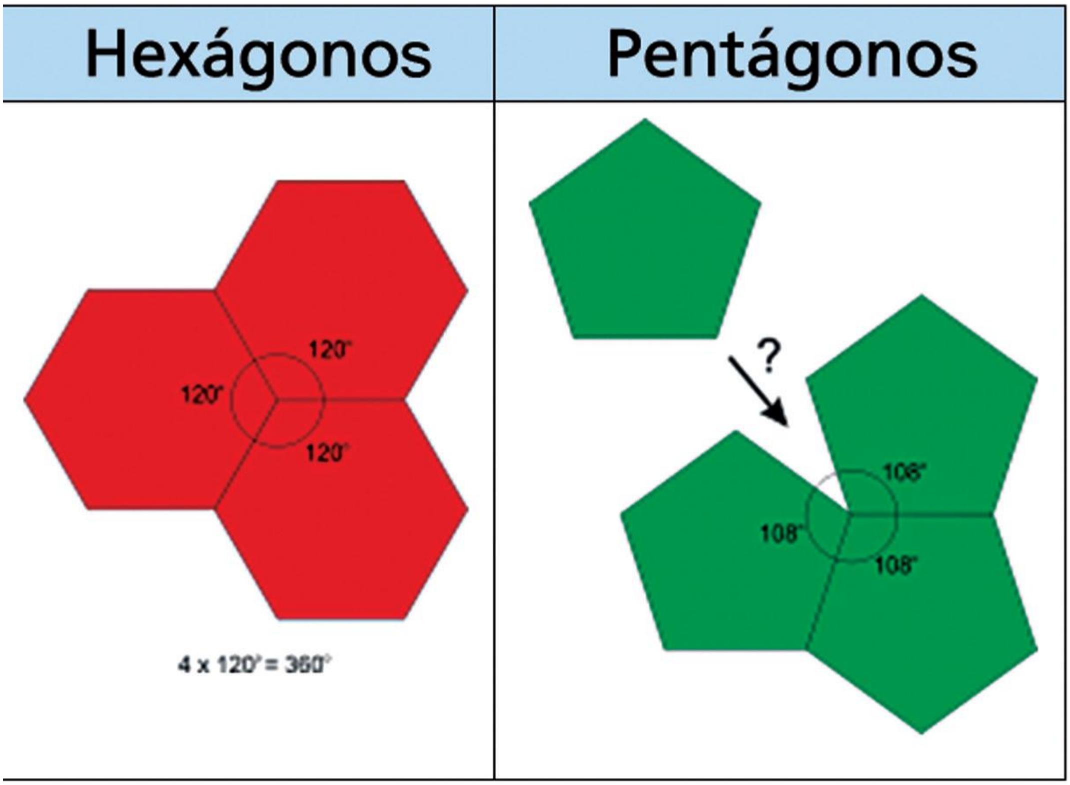


Figura 9: O triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular são os únicos polígonos regulares que permitem ladrilhamento, já que não há necessidade de encaixe de outros polígonos.

Veja que não é possível fazer pavimentações, utilizando somente pentágonos regulares. Isso ocorre porque a pavimentação só é possível quando os ângulos internos completam 360º ao se juntarem. Veja a tabela a seguir, construída a partir do quadro da Figura 9.

Pág. 39

Figura	Ângulo interno	Na junção
Triângulo equilátero	60º	6 x 60º = 360º
Quadrado	90º	4 x 90º = 360º
Hexágono regular	120º	3 x 120º = 360º
Pentágono regular	108º	3 x 108º = 324º 4 x 108º = 432º

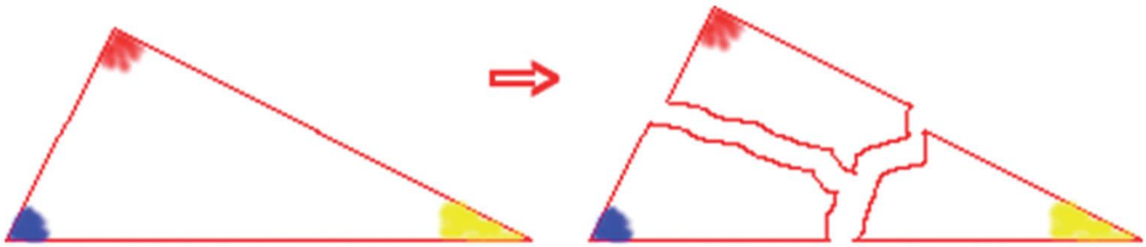
Seção 3
Calculando o ângulo interno de um polígono regular

Será que não conseguiríamos ladrilhar, usando heptágonos regulares (7 lados), octógonos regulares (oito lados), eneágonos regulares (9 lados) etc.? Para que possamos responder essa questão, precisamos saber qual a medida do ângulo interno de cada um desses polígonos. Vamos ver, passo a passo, uma estratégia para que possamos encontrar essas medidas.

Passo 1

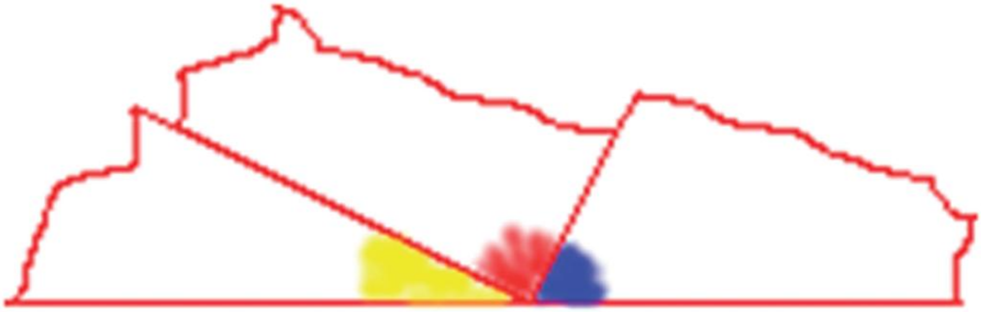
Vamos utilizar como referência o fato de que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo sempre é 180º. Não faremos uma demonstração matemática para tal afirmação, mas uma experiência simples poderá ajudá-lo a chegar a tal conclusão, intuitivamente.

Desenhe um triângulo qualquer e pinte os três ângulos com cores diferentes. Depois recorte o da seguinte forma:



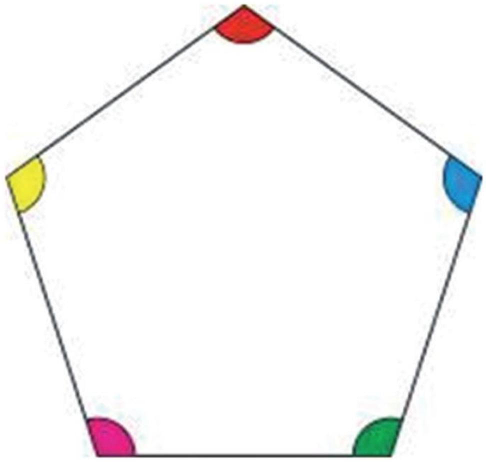
Pág. 40

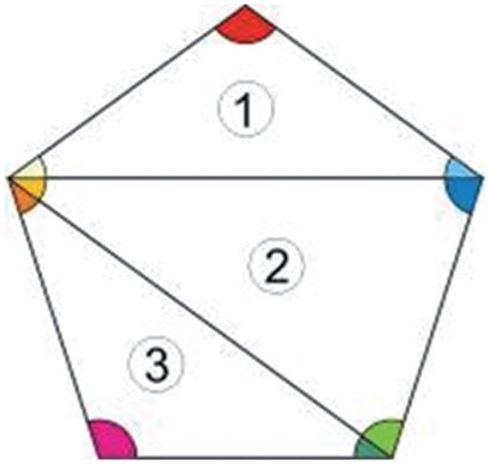
Agora junte os três ângulos. Você poderá observar que eles juntos formam um ângulo de medida igual a 180º (ângulo raso), como visto na Unidade 10 do Módulo 1.



Passo 2

Vejamos agora o cálculo da soma dos ângulos internos de um polígono. Vamos tomar o pentágono regular como referência. Observe que podemos dividi-lo em três triângulos.





Cada um dos triângulos formados possui soma igual a 180º para os seus três ângulos.

Triângulo 1

Triângulo 2

Triângulo 3

Pág. 41

Os dois desenhos mostram que todos os nove ângulos dos três triângulos, juntos, equivalem a todos os cinco ângulos internos do pentágono. Portanto, a soma desses ângulos é igual a 180º x 3 = 540º. Como os cinco ângulos internos do pentágono têm mesma medida, podemos encontrar tal valor dividindo 540º por 5. Assim:

540º ÷ 5 = 108º

Então, o valor do ângulo interno do pentágono regular é 108º, como havíamos dito antes. Logo, não é possível ladrilhar uma superfície plana apenas com o pentágono regular, pois suas combinações nunca resultariam em 360°.

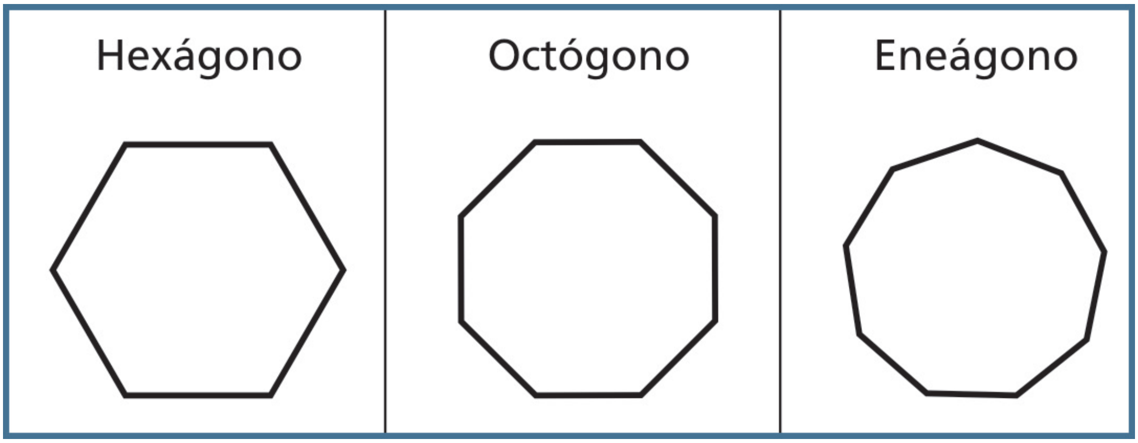
Atividade 1

Agora que você já viu como calcular um ângulo interno de um polígono regular, a partir do exemplo do pentágono, faça o mesmo para os casos a seguir. Dividindo os polígonos abaixo em triângulos, determine as medidas de seus ângulos internos.

a. Hexágono regular

b. Octógono regular

c. Eneágono regular



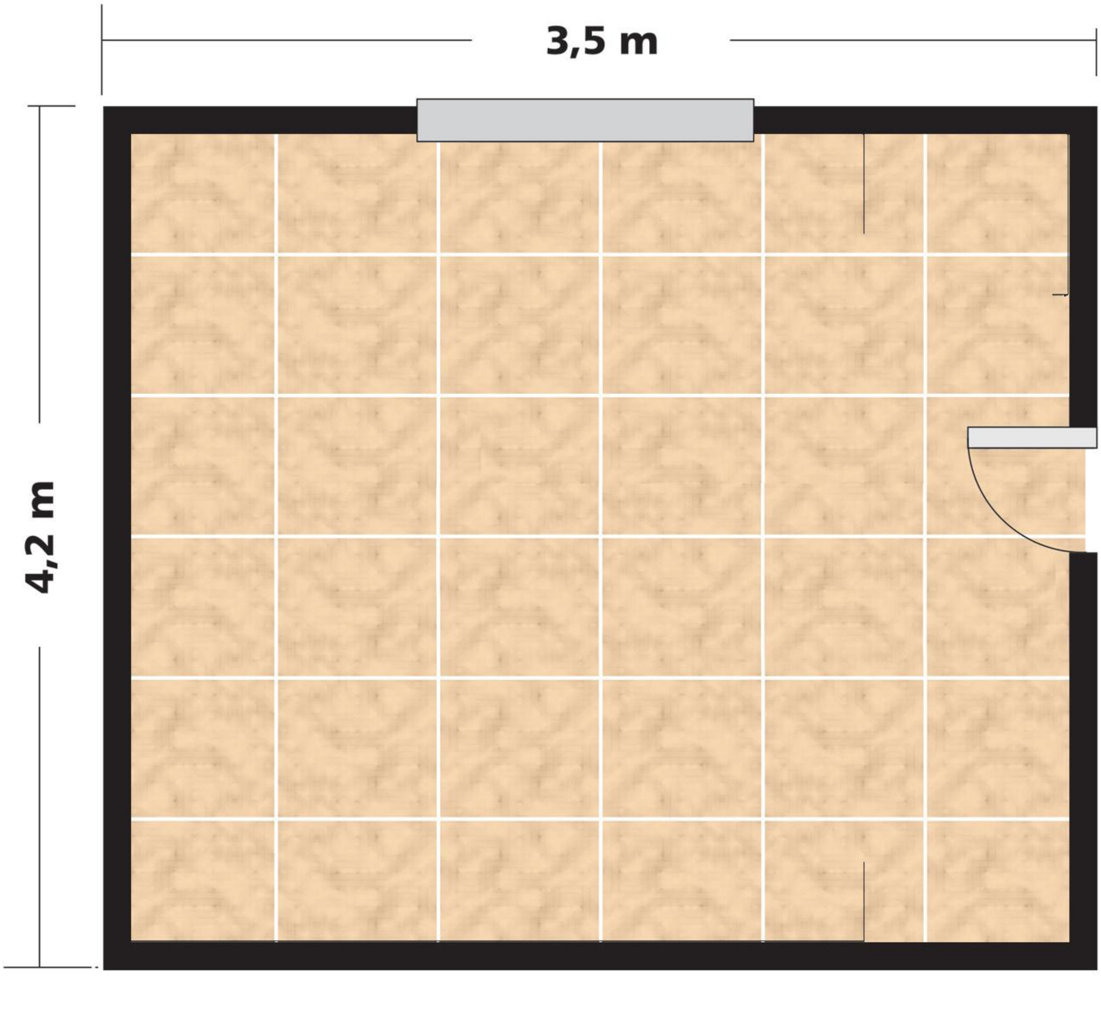
******

Pág. 42
Seção 4
Calculando revestimentos com polígonos

Até então, trabalhamos com pavimentações, utilizando polígonos regulares. Vamos continuar falando em pavimentação, só que agora apresentaremos novas possibilidades com polígonos não regulares. Na Atividade 2, a ideia é fazer pavimentações com peças retangulares, enquanto que, na Atividade 3, as peças possuem um formato um tanto quanto diferentes e precisamos encontrar uma forma de encaixá-las da melhor maneira possível.

Atividade 2

Uma cozinha retangular possui medidas de 3,5m x 4,20m, conforme desenho abaixo:



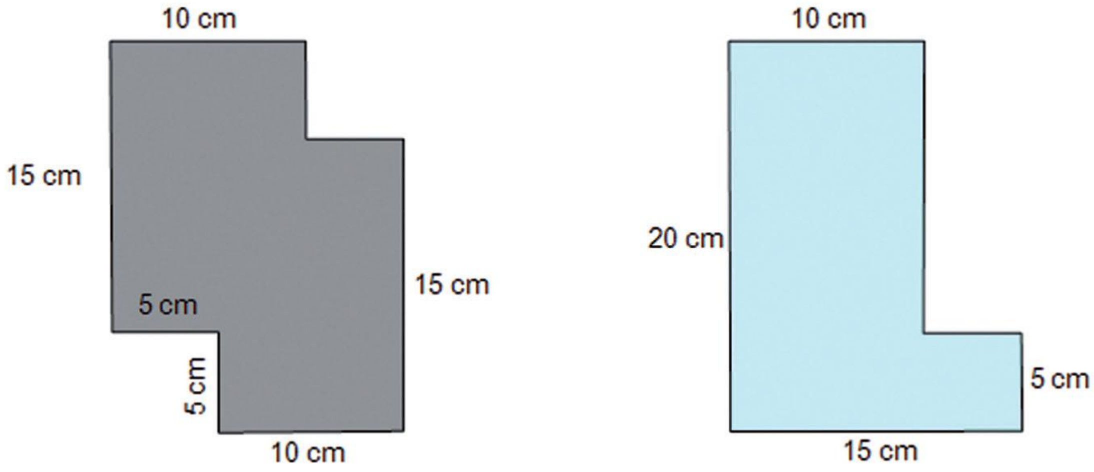
Um pedreiro pretende revestir o piso da cozinha, utilizando peças cerâmicas retangulares com medidas 20cmx30cm. Se descontarmos o rejuntamento, quantas peças serão necessárias?

******

Pág. 43

Atividade 3

Você precisa revestir o piso de um quarto e, para isso, escolheu cerâmicas com formatos um pouco diferentes. Além disso, você quer utilizar duas cores para fazer o revestimento. Veja as imagens das peças que



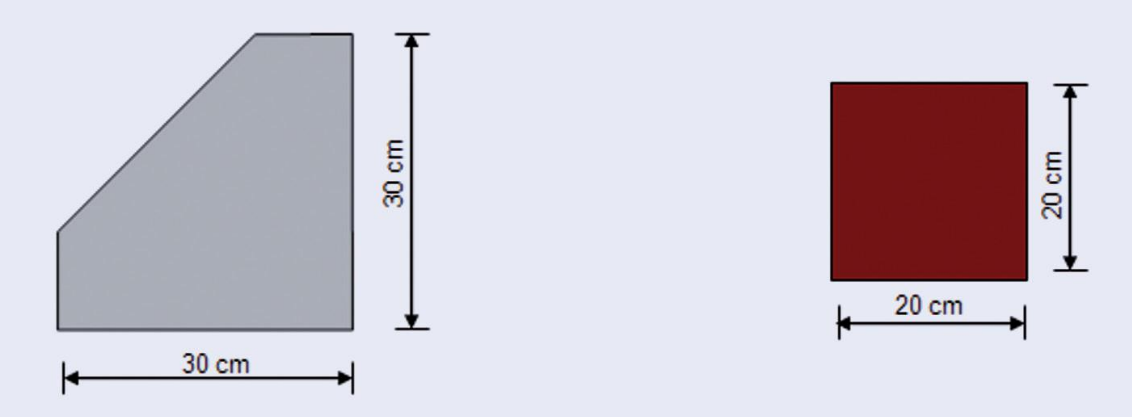
você tem disponíveis: Sabendo que o quarto tem forma retangular com medidas 3,4m x 4,2m (É preciso dar os espaçamentos adequados aqui), calcule a quantidade mínima de peças de cada cor que de verão ser compradas para que não haja desperdício. Pedaços cortados não poderão ser reaproveitados.

Pág. 44

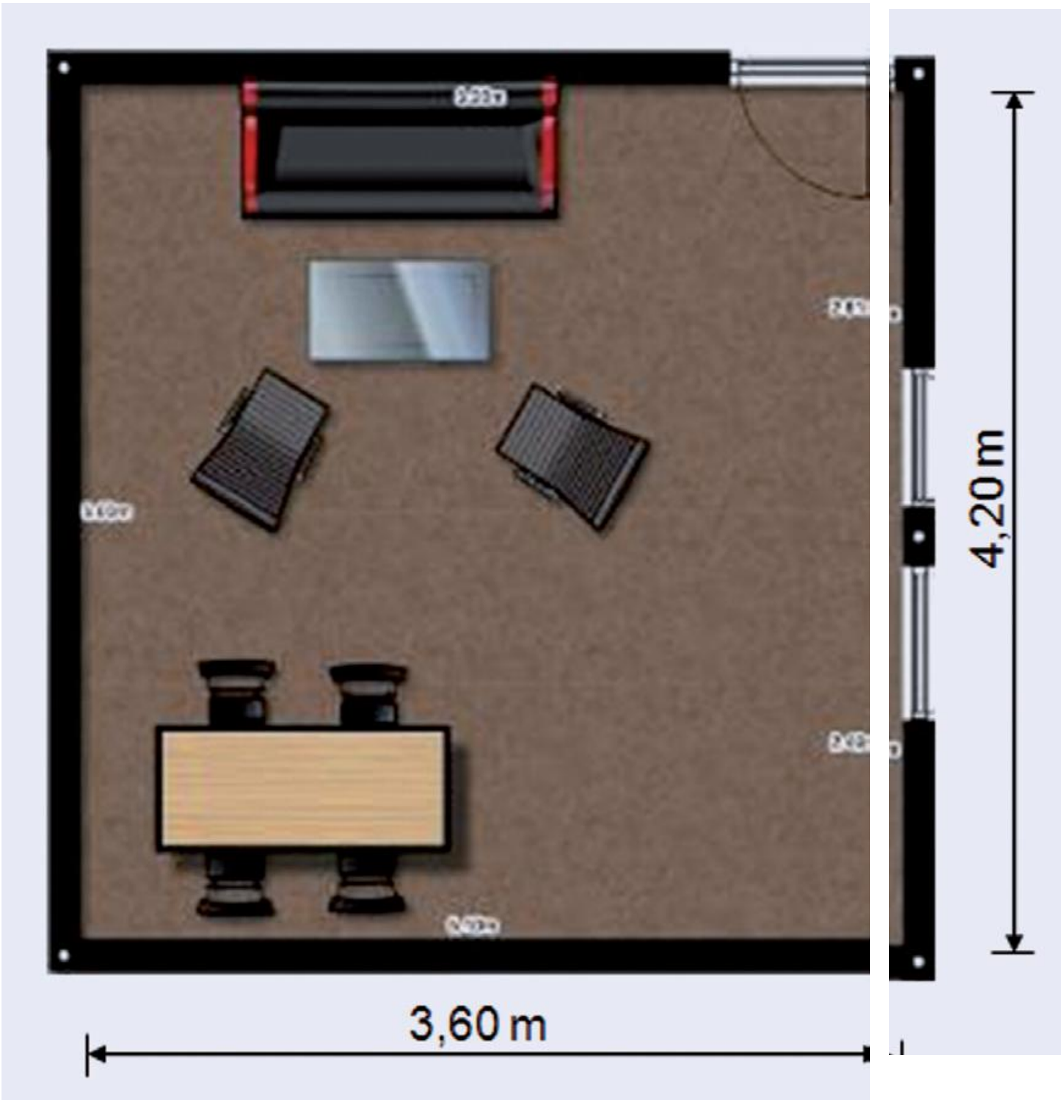
Atividade 4

É muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Evidentemente, os mais comuns são aqueles que possuem formas retangulares. Entretanto, hoje em dia, é cada vez mais frequente encontrarmos cerâmicas com outras formas poligonais, o que ajuda arquitetos e decoradores a diversificar o ladrilhamento utilizado para os vários tipos de revestimentos. Observe, por exemplo, uma parte de um piso revestido com cerâmicas chinesas.

Perceba que há dois tipos de piso: um quadrado e outro pentagonal. Veja as medidas das peças:



O piso do cômodo a seguir será totalmente revestido, seguindo um mesmo padrão de composição dessas duas peças. Quantas peças de cada tipo serão gastas para que haja o menor desperdício possível? Considere que as partes cortadas das peças não poderão ser reaproveitadas e desconsidere o rejuntamento.



******

Pág. 45

Momento de reflexão

Os polígonos foram o foco do estudo desta unidade.

Você pôde estudar suas propriedades e, sobretudo, decisões sobre possibilidades de pavimentações ou ladrilhamentos, a partir do cálculo de ângulos internos de polígonos regulares. Tente refletir e escrever com suas palavras algumas propriedades de polígonos e como se calcula a medida de um ângulo interno de um polígono regular. Depois faça uma nova leitura da unidade, compare com o que escreveu e, se for necessário, reveja sua escrita. Quanto ao problema colocado inicialmente, está resolvido na próxima seção, mas, agora que já estudou sobre o assunto, tente resolvê-lo antes de passar para frente. Depois compare os resultados.

Pág. 46

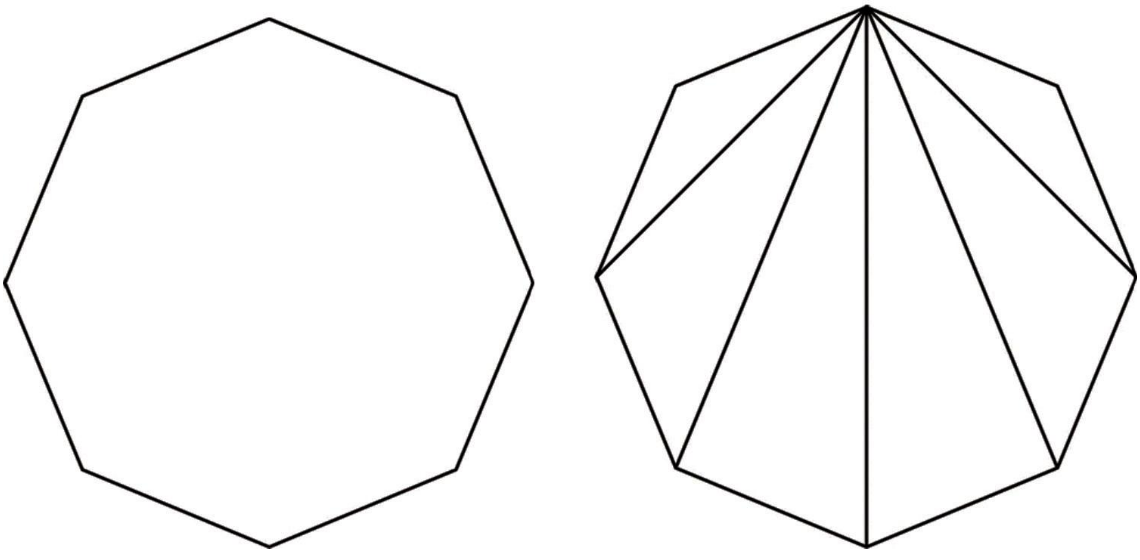
Voltando à conversa inicial...

Se um arquiteto quer combinar um ladrilho octogonal com outro tipo de ladrilho, qual polígono ele deve escolher?

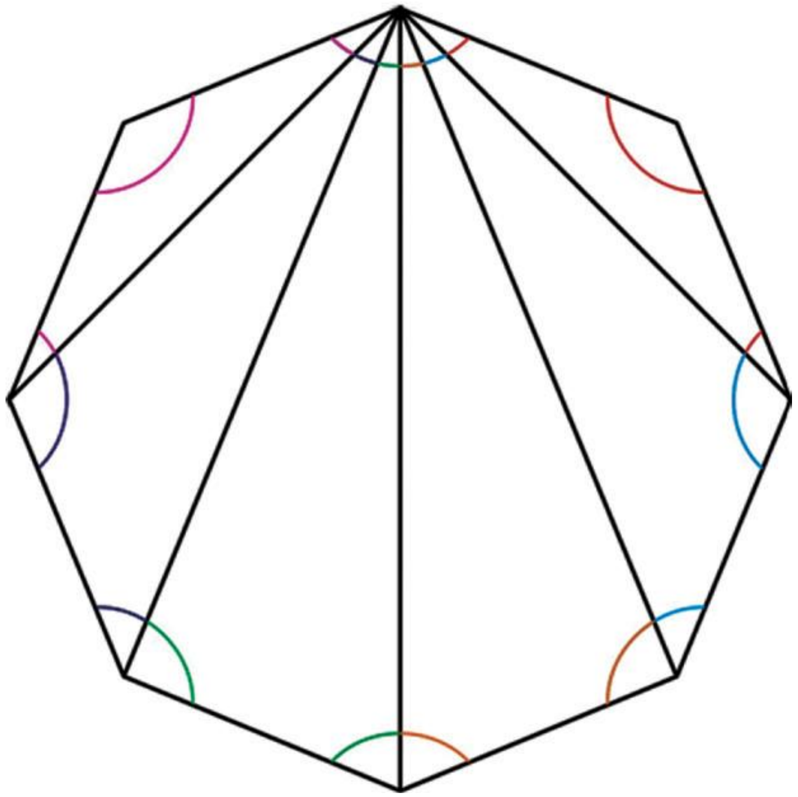
Antes de qualquer coisa, é necessário lembrar que conseguimos fazer pavimentações desde que a soma dos ângulos internos correspondentes aos vértices que se encontram seja 360º. Neste caso, a primeira tarefa seria calcular o ângulo interno de um octógono regular.

Podemos proceder da seguinte forma:

• Criam-se todos os triângulos possíveis, sem que os segmentos se cruzem:



• Marcam-se os ângulos internos dos triângulos:



• Cada triângulo, como sabemos, possui soma de seus ângulos internos igual a 180°. E, como se pode perceber, todos os ângulos internos dos triângulos juntos formam os ângulos internos do octógono. Logo, a soma dos ângulos internos do octógono é igual à soma dos ângulos internos de 6 triângulos, o que nos leva a afirmar que:

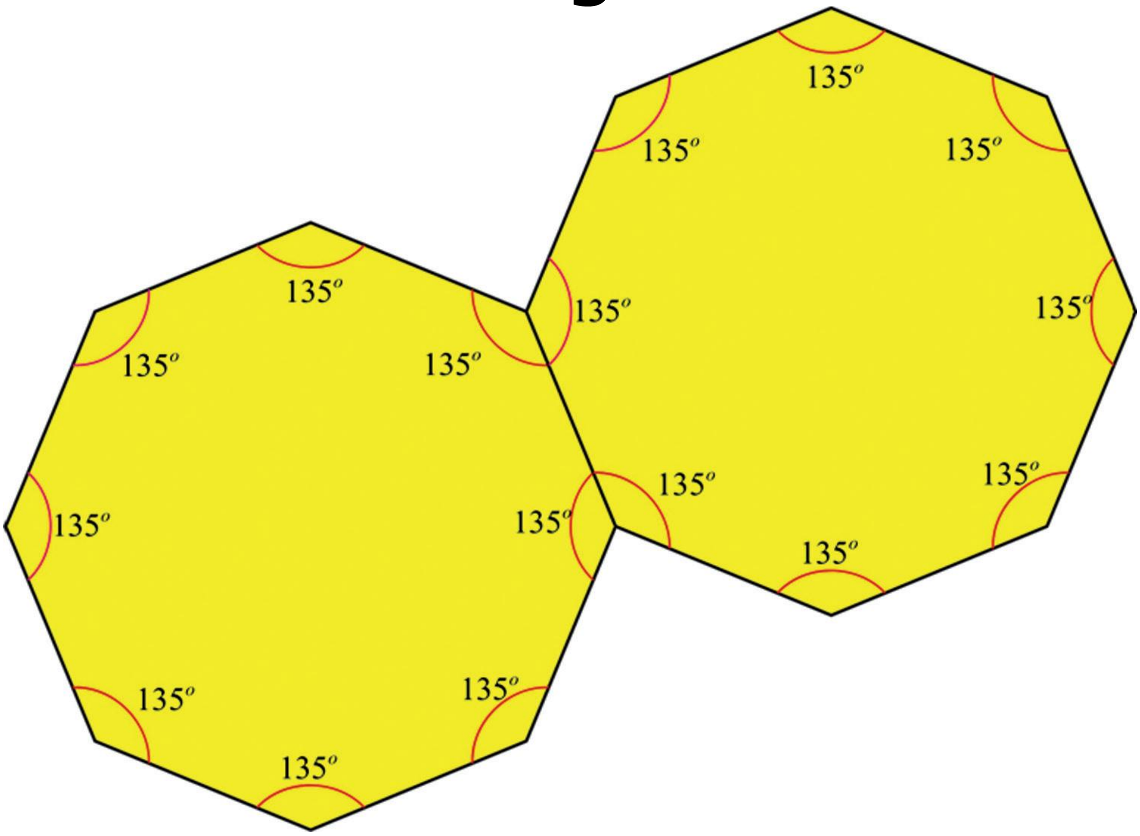
Pág. 47

Soma dos ângulos internos do octógono =6 x 180 º = 1080º

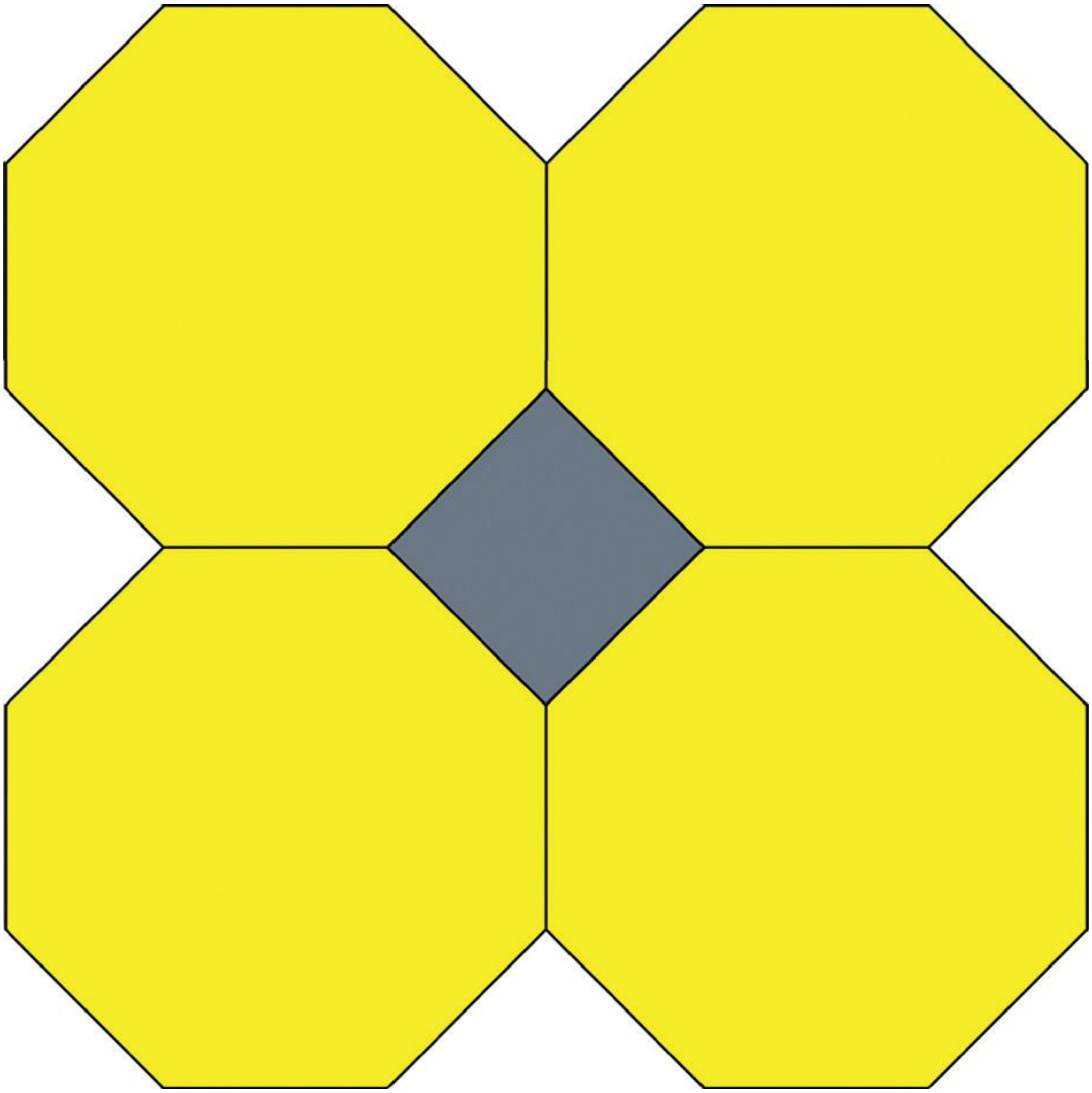
Como estamos falando de octógono regular, podemos dizer que:

Ângulo interno do octógono$=\dfrac{1080°}{8} = 135°$

Vamos, então, tentar ladrilhar octógonos:

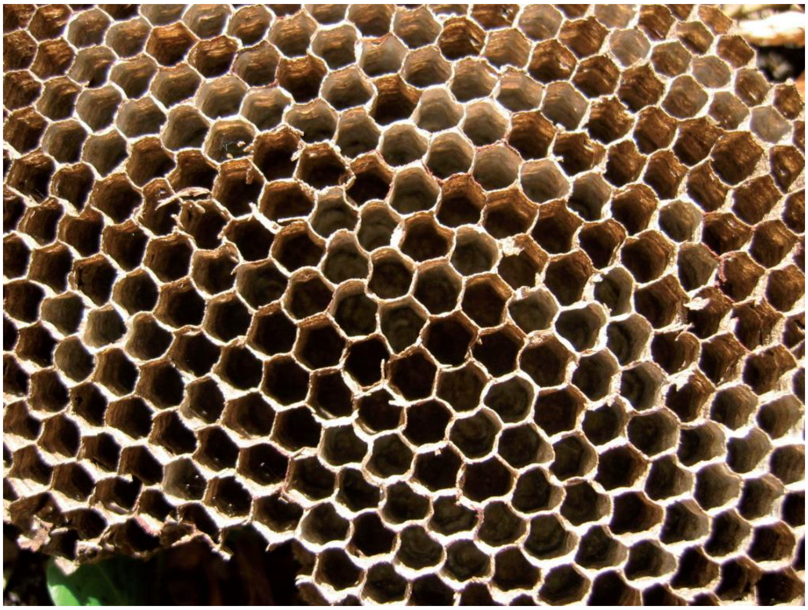


Observem que ao juntarmos dois octógonos, nos vértices que se uniram, já se somam 270º. Evidentemente que não cabe mais um octógono, pois ultrapassaria os 360o pretendidos. Uma simples conta mostra-nos que faltam 90º, que é exatamente a medida do ângulo interno do quadrado, sendo esta, portanto, a forma do outro ladrilho a ser escolhido. Veja como ficaria este ladrilhamento:



Pág. 48

Veja ainda



Observe como as abelhas fazem suas colmeias. A estrutura lembra muito um ladrilhamento com hexágonos, não é mesmo? Mas, sabe por que as abelhas usam formatos hexagonais para sua construção? Leia a história a seguir:

Afirma Maeterlinck, no seu famoso livro sobre as abelhas, que esses animais, na construção de seus alvéolos, resolvem um problema de alta Matemática.

Há nessa asserção certo exagero do escritor belga: o problema que as abelhas resolvem pode ser abordado, sem grande dificuldade, com os recursos da Matemática elementar.

Não nos importa, porém, saber se o problema é elementar ou transcendente; a verdade é que esses pequeninos e laboriosos insetos resolvem um interessantíssimo problema por um artifício que chega a deslumbrar a inteligência humana.

Todos sabem que a abelha constrói os seus alvéolos para neles depositar o mel que fabrica. Esses alvéolos são feitos de cera. A abelha procura, portanto, obter uma forma de alvéolos que seja a mais econômica possível, isto é, que apresente maior área para a menor porção de material empregado. É preciso que a parede de um alvéolo sirva, também, ao alvéolo vizinho. Logo, o alvéolo não pode ter forma cilíndrica, pois, do contrário, cada parede só serviria a um alvéolo. Procuraram as abelhas uma forma poligonal para os seus alvéolos. Os únicos polígonos regulares que podem ser justapostos sem deixar interstício são: o triangular (A), o quadrangular (B) e o hexagonal (C). Foi este último que as abelhas escolheram. E sabem por quê? Porque dos três

polígonos regulares A, B e C construídos com porção igual de cera, o prisma hexagonal é o que apresenta maior área.
Adaptado do livro **Matemática Divertida e Curiosa.** Ed. Record, 2005 (Malba Tahan)

Pág. 49

Referências

.IMENES, L. M. Geometria dos mosaicos. Coleção Vivendo a Matemática. São Paulo: Scipione, 1996.

.MACHADO, N. J. Polígonos, Centopéias e outros Bichos. Coleção Vivendo a Matemática. São Paulo: Scipione, 1988.

.SOUZA, J. C. de M. Matemática divertida e curiosa. Rio de Janeiro/São Paulo, Editora Record, 2001.

Pág. 51

O que perguntam por aí?

Atividade 1 (ENEM 2009) Questão 78

Uma das expressões artísticas mais famosas associada aos conceitos de simetria e congruência é, talvez, a obra de Maurits Cornelis Escher, artistas holandês cujo trabalho é amplamente difundido. A figura apresentada, de sua autoria, mostra a pavimentação do plano com cavalos claros e cavalos escuros, que são congruentes e se encaixam sem deixar espaços vazios.

Realizando procedimentos análogos aos feitos por Escher, entre as figuras abaixo, aquela que poderia pavimentar um plano, utilizando-se peças congruentes de tonalidades claras e escuras é

(A) 

(C) 

(E) 

(B) 

(D) 

Atividade 2 (adaptada de ENEM 2011) Questão 154

Disponível em: http://www.diaadia.pr.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

Qual a medida do ângulo α?

a. 30º

b. 60º

c. 90º

d. 120º

e. 240º

Pág. 53
Respostas das atividades

Situação problema 1

Por meio da observação das Figuras 3 e 4, é possível perceber as seguintes características de uma figura geométrica para que ela possa ser considerada um polígono:

1. É uma figura plana fechada.
2. É limitada apenas por linhas retas (segmentos de retas).

Atividade 1

Dividindo os polígonos desta atividade em triângulos, é possível encontrar os seguintes valores de seus ângulos internos:

a. Hexágono regular

Utilizando a mesma estratégia utilizada para o pentágono, podemos formar quatro triângulos.

A soma desses ângulos é igual a 180º x 4 = 720º.

Como são seis ângulos de mesma medida, podemos encontrar tal valor, dividindo 720º por 6. Assim:

720º ÷ 6 = 120º.

b. Octógono regular

Utilizando a mesma estratégia utilizada para o hexágono, podemos formar seis triângulos.

A soma desses ângulos é igual a 180º x 6 = 1080º.

Como são oito ângulos de mesma medida, podemos encontrar tal valor dividindo 1080º por 8.

Assim:

1080º ÷ 8 = 135º.

c. Eneágono regular

Pág. 54

Utilizando a mesma estratégia utilizada para o octógono, podemos formar sete triângulos.

A soma desses ângulos é igual a 180º x 7 = 1.260º.

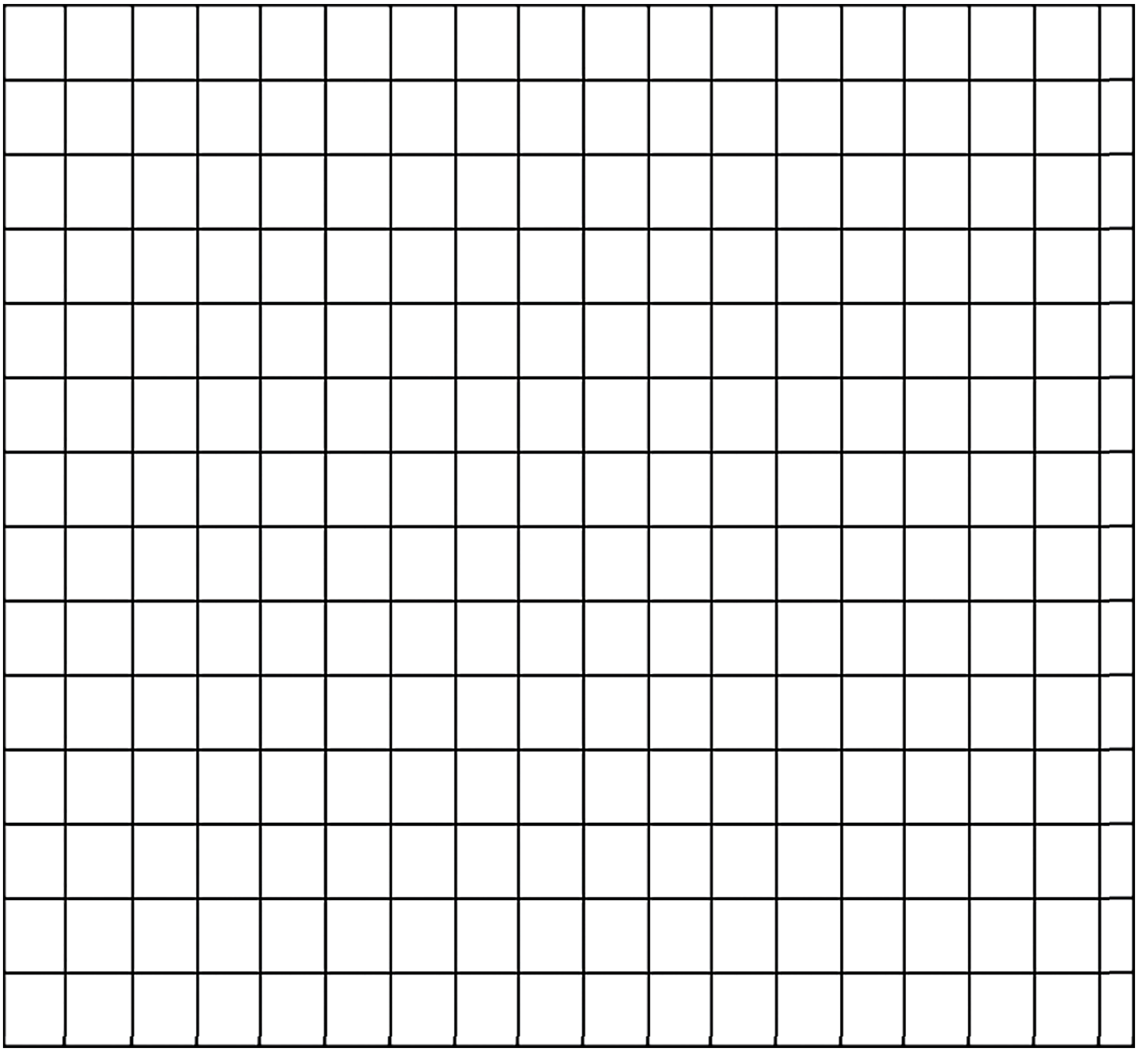
Como são nove ângulos de mesma medida, podemos encontrar tal valor, dividindo 1.260º por 9. Assim:

1.260º ÷ 9 = 140º.

Atividade 2

Para que o pedreiro possa revestir o piso da cozinha, utilizando peças cerâmicas retangulares com medidas 20 cmx30

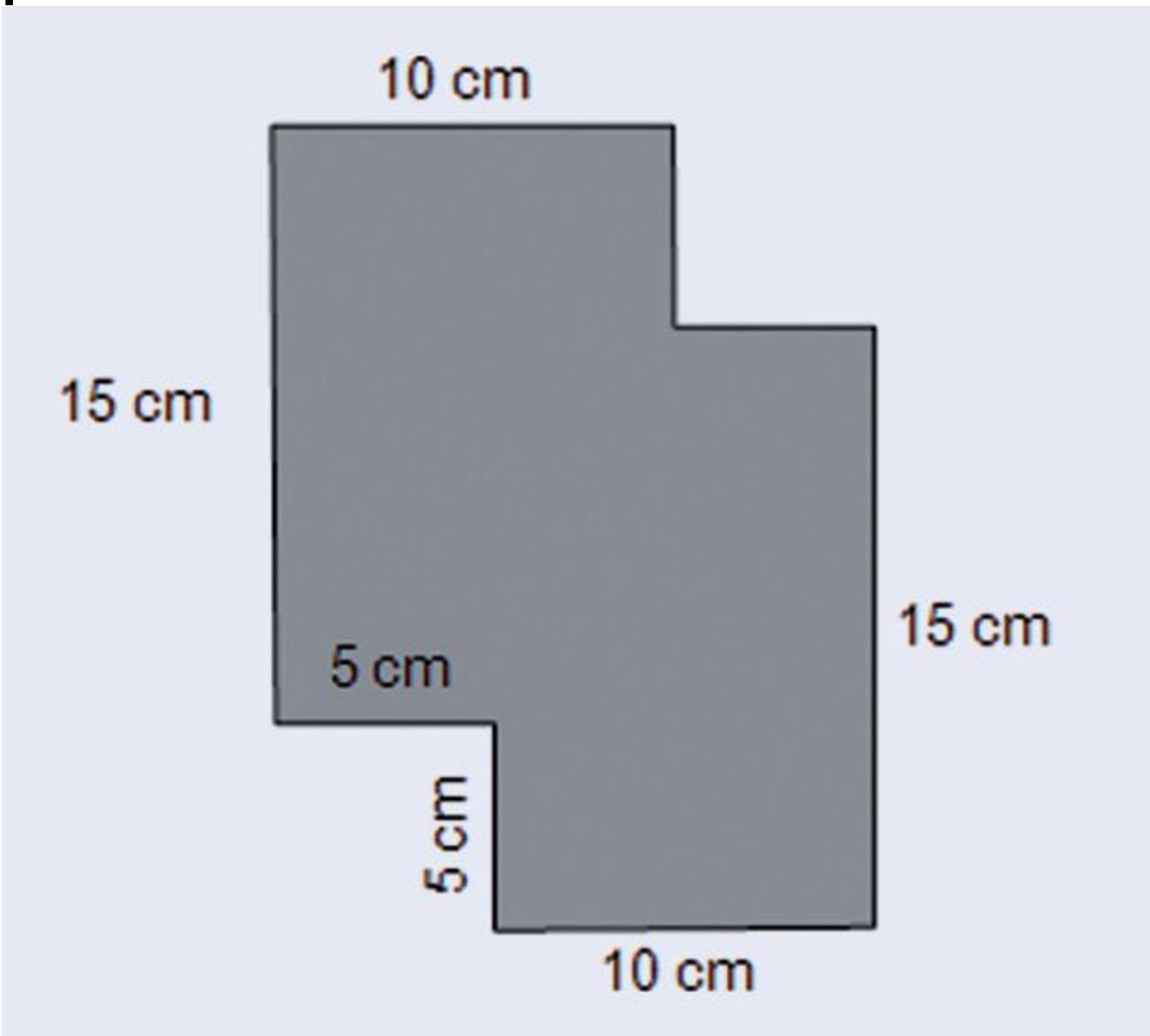
cm, descontando o rejuntamento, ele precisará de 245 peças. Cabem 17,5 peças em um sentido e 14 peças no outro sentido.
Assim:



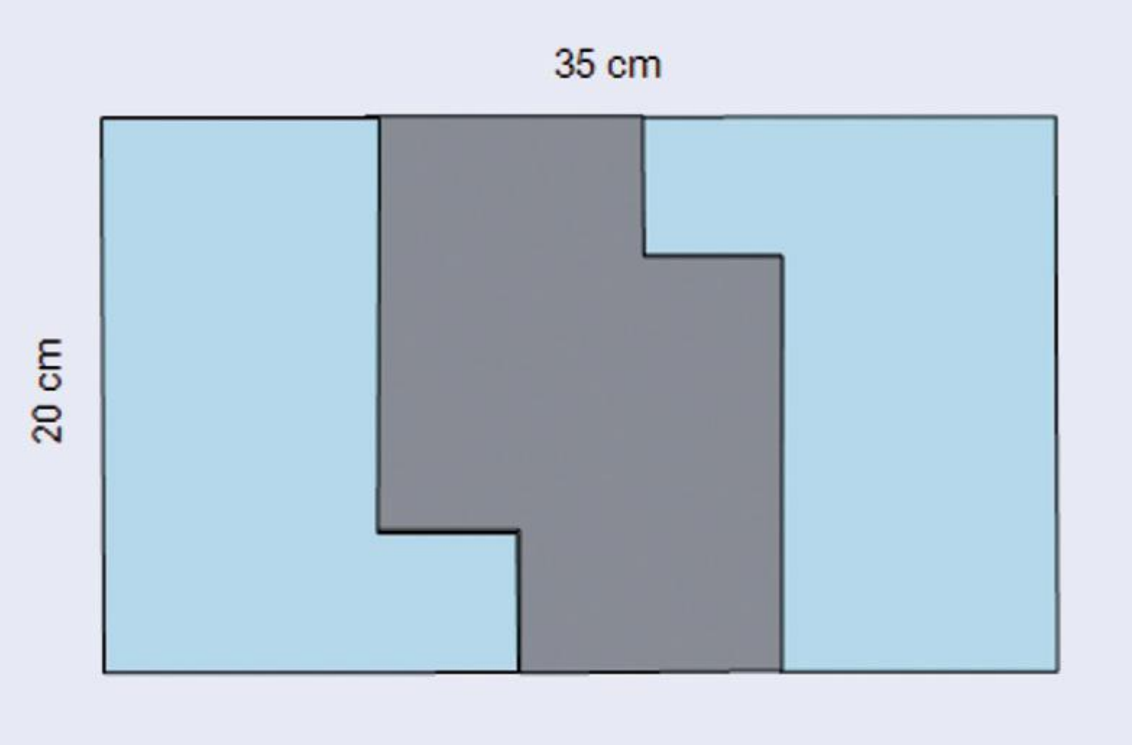
Pág. 55

Atividade 3

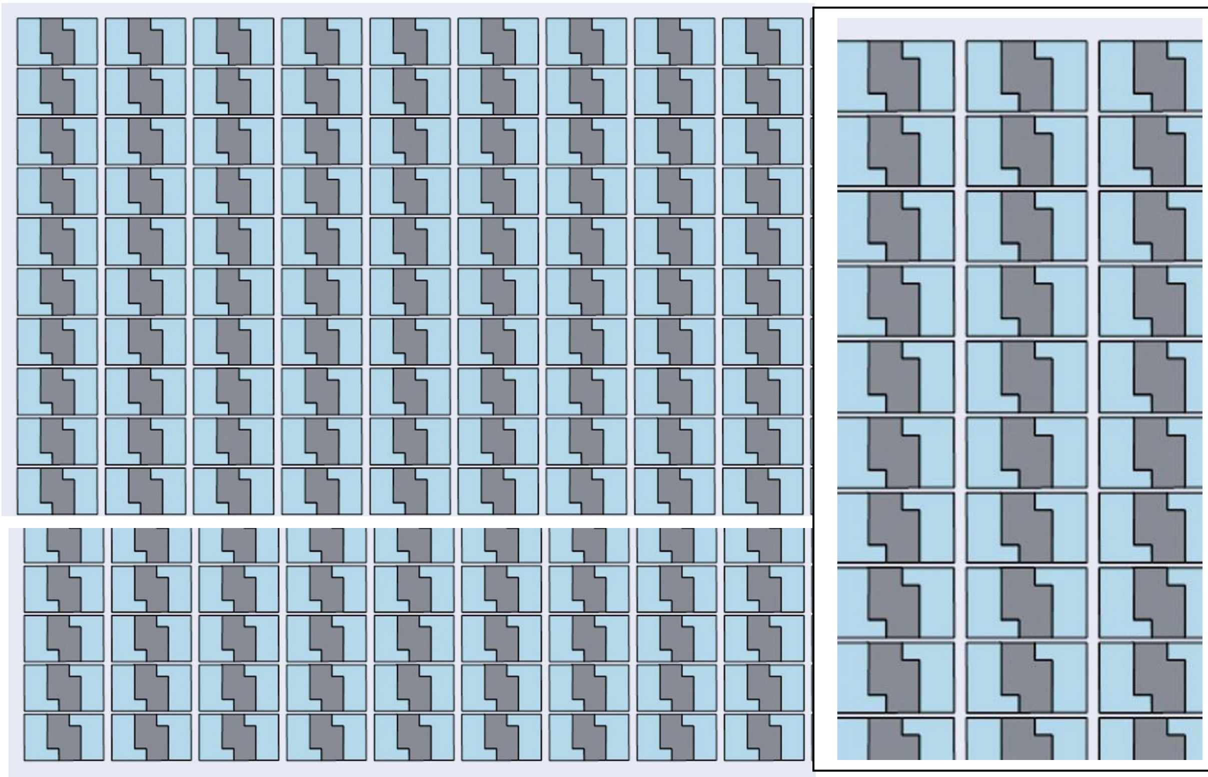
Para revestir o quarto com medidas 3,4m x 4,2m de forma regular, utilizando as cerâmicas abaixo, vamos ver primeiro como as peças poderiam ser montadas:



As peças poderão ser montadas da seguinte forma:



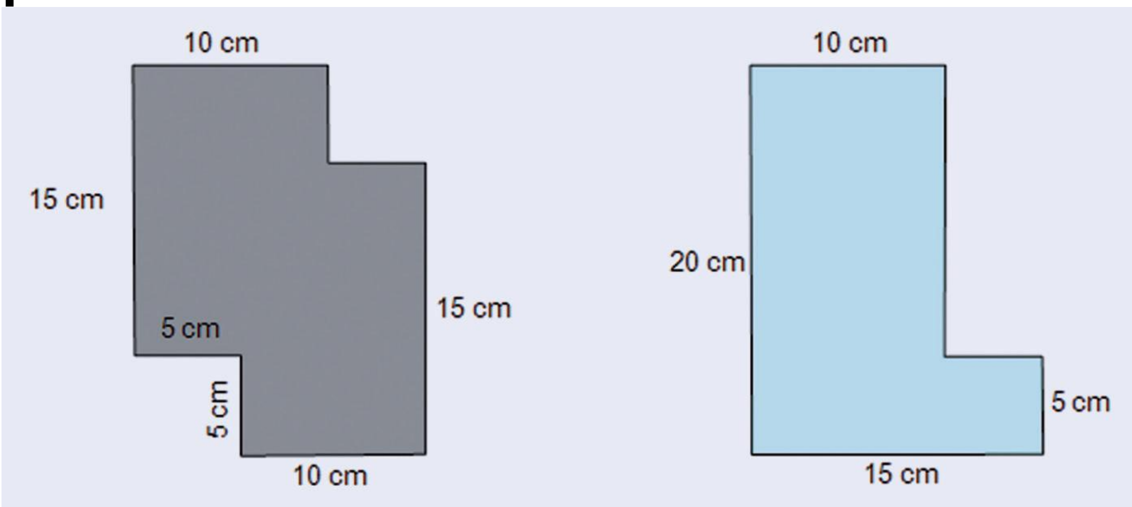
Seguindo as medidas do quarto, as peças poderiam ser organizadas da seguinte maneira:



Pág. 56

A quantidade total de cada um dos conjuntos pode ser encontrada fazendo: 12 (conjuntos na horizontal) x 17 (conjuntos na vertical) = 204 conjuntos no total.

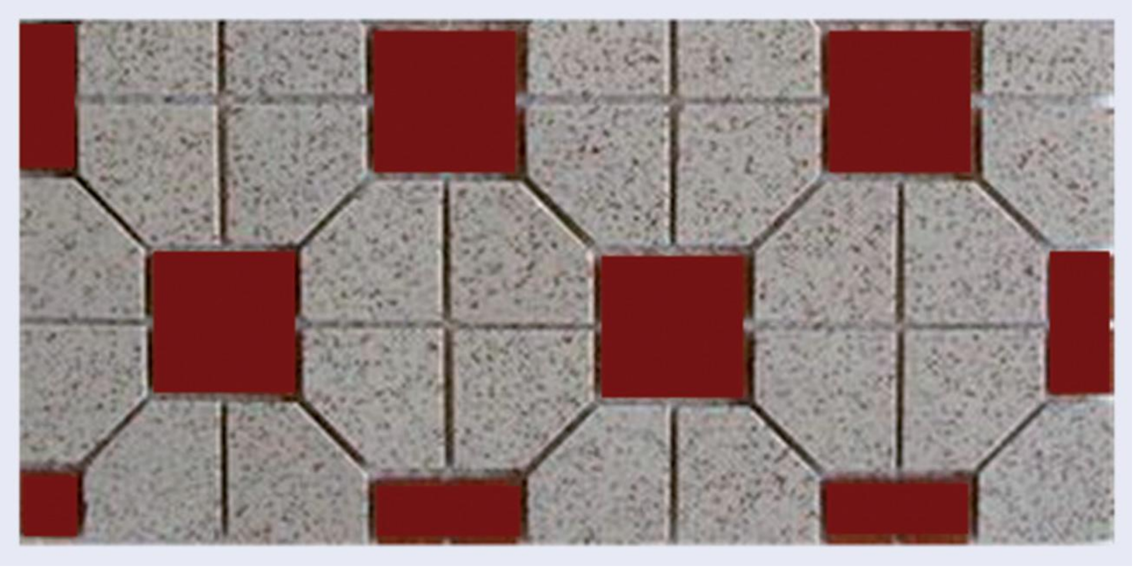
Mas, cada conjunto tem uma peça cinza e duas azuis. A quantidade de cada uma delas é, portanto:



204   204 x 2 = 408

Atividade 4

Para revestir o piso do cômodo de medidas 4,20 m x 3,60 m, com as cerâmicas chinesas a seguir:



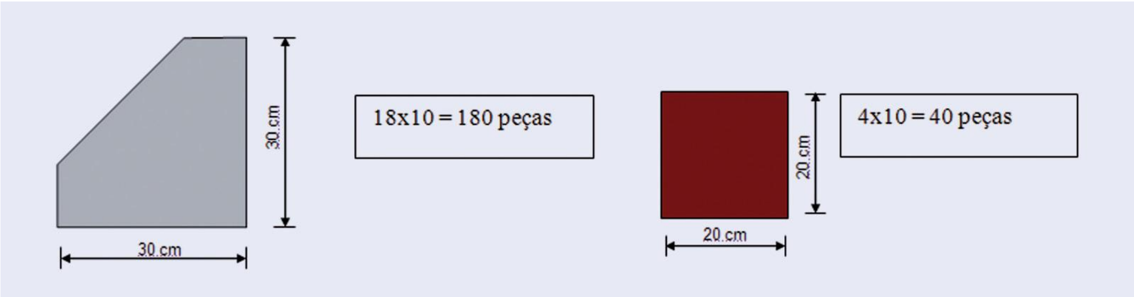
É preciso levar em consideração que há dois tipos de piso: um quadrado e outro pentagonal.

Pág. 57

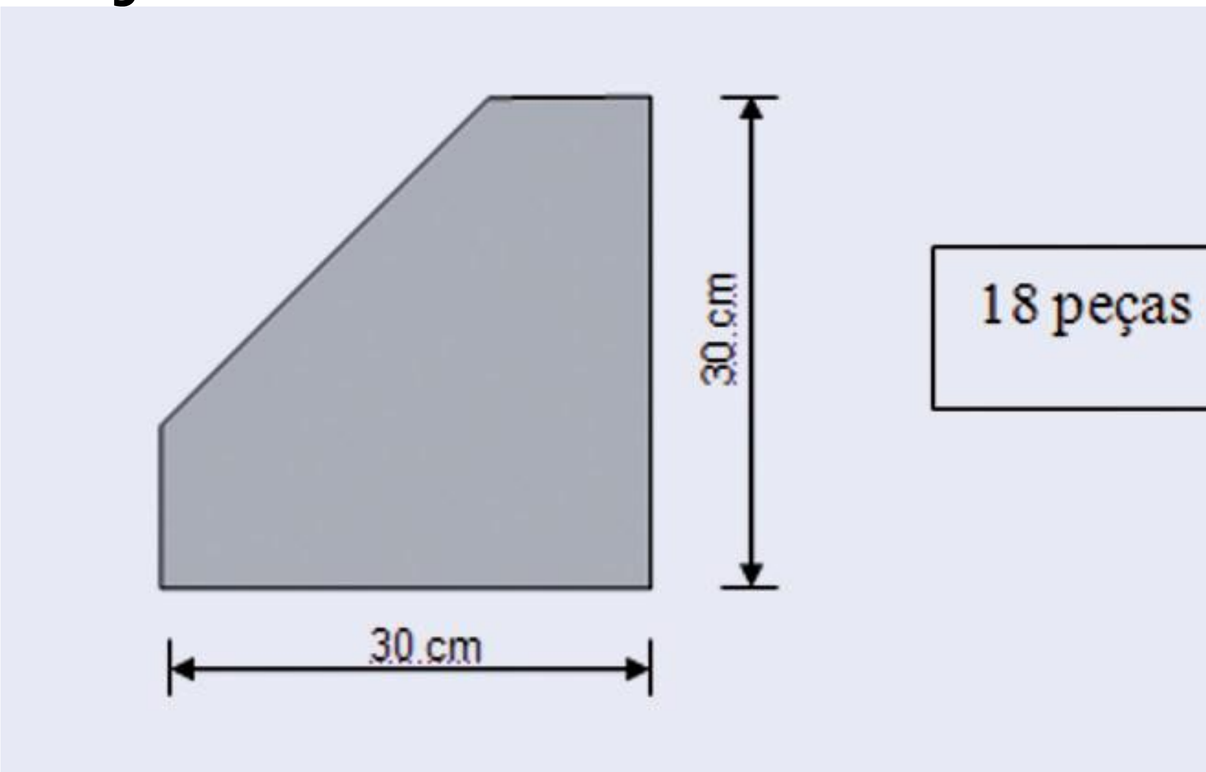
Para decidir quantas peças de cada tipo de cerâmica serão gastas e para efeito de cálculo, podemos pensar em montar as peças da seguinte forma:
Neste ponto há uma figura. Consulte o tutor.

Pág. 58

No desenho podemos, então, contar: Peças inteiras:



Peças cortadas:



O que perguntam por aí?

Atividade 1

Resposta: D

Atividade 2

Resposta: E

Unidade 6
Pág. 59

Introdução ao conceito de função

Para início de conversa...

Você já prestou atenção à sua conta de água? Entender as diversas contas que chegam às nossas casas é importante para nos informarmos a respeito de desperdícios e mau uso dos diversos serviços públicos que nos são prestados. Além disso, temos o direito e o dever de verificar se o que está sendo cobrado condiz com o consumo feito em nossas casas. Na maioria dessas contas, é bastante presente a comunicação matemática. Nelas podemos notar a presença de operações simples como adição e multiplicação, mas também, cálculos de porcentagens e, em alguns casos, gráficos ou tabelas com o histórico do consumo residencial. Neste módulo, vamos utilizar a conta de água para introduzirmos um conceito muito importante para a Matemática: as funções.

O mais importante é que consigamos reconhecer funções como relação entre duas grandezas e que possamos resolver problemas como o mostrado a seguir, extraído da prova do ENEM 2008.

A figura a seguir representa o boleto de cobrança de uma escola referente ao mês de junho de 2008.

Banco S.A.	
Pagável em qualquer agência bancária até a data do vencimento	Vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/código
Data documento	Nosso número

02/06/2008	
Uso do banco	(*) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso	(-) Descontos
	(-) Outras deduções
	(+) Mora/multa
	(+) Outros acréscimos
	(*) Valor cobrado

Se M(x) é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então:

A. $M(x) = 500 + 0{,}4x$

B. $M(x) = 500 + 010x$

C. $M(x) = 510 + 0{,}4x$

D. $M(x) = 510 + 40x$

E. $M(x) = 500 + 10{,}4x$

Ao final desta unidade, retornaremos a esse exercício!

Pág. 60

Objetivos de Aprendizagem

.Ler e interpretar dados de uma conta de água, telefone, luz ou gás.

.Compreender elementos importantes para o conceito de função.

Pág. 61

Situação problema 1

Conhecendo uma conta d’água

Diferente da energia elétrica e da telefonia, o fornecimento de água e esgoto tratado continua sendo um serviço prestado pelo Estado. Sendo assim, são estatais que fornecem e cobram a água que chega às nossas residências, não havendo, portanto, órgão que regulamente esta prática. Aproveite os seus estudos aqui nesta unidade para discutir os vários aspectos relacionados ao uso da água. Procure, sempre que possível, vincular as novas informações que serão trabalhadas aqui com o que já conhece, promovendo debates com seus colegas.

Você sabia?

Que o consumo de água dos brasileiros é muito

alto? Temos a cultura da fartura e hábitos como banhos diários que nos tornam grandes consumidores. Mas há que se distinguir entre perda e desperdício. A perda é definida em função do volume de água vendida sobre o volume de água produzida. Você está pagando por toda água que entra pelo seu hidrômetro.
Quanto mais consome, mais paga. Consumo

excessivo passa a ser uma questão econômica e de conscientização ambiental. Lavar a cabeça com jato d'água, como ainda se vê muito por aí vai acabar ficando caro. Outra coisa é o desperdício. No Brasil, é de 46%, em média. Um absurdo! Imagina só: metade de toda a água tratada fornecida pelas companhias de abastecimento fica pelo meio do caminho. Sai através de tubos e canos mal conservados que se rompem, ou é desviada de outras formas. Isso é descaso.

******

Pág. 62

Veja a seguir um modelo de conta de água emitido pela CESAN (Companhia Espírito Santense de Saneamento).

CESAN Qualidade em Saneamento

Companhia Espírito Santense de Saneamento
CNPJ: 28.151.363/0001-47 - Inscr. Estadual: 080.247.318
Atendimento ao Cliente: 115

www.cesan.com.br

FATURA

Mês/Ano	Matrícula
02/2011	014125-0

Cliente	CPF/CNPJ
PEDRO VASCONCELOS DE MILETO	

Endereço	N°	CEP
RUA DOS ENCANTOS TORTOS	300	29000-000

Bairro	Localidade	Complemento
NOVA MACEDÔNIA	VITÓRIA	

Classificação	Hidrômetro	Ciclo/Sequência
1.23123.000	H18D111888	10/0000000000

Leitura Anterior	197
Leitura Atual	223
Consumo Medido	26
Ocorrência Leitura	0 0
Data da Leitura	28/02/2011
Dias de Consumo/Venda	33/33
Média Diária	0.849

Histórico	Consumo	/		OL
01 / 2011	29.0	00	00	MDD
12 / 2010	28.0	00	00	MDD
11 / 2010	24.0	00	00	MDD
10 / 2010	29.0	00	00	MDD
09 / 2010	30.0	10	10	MDD
08 / 2010	12.0	00	00	MDD

1113-ÁGUA RESIDENCIAL MEDIDO 26,0 56,17

VENCIMENTO 12/03/2011

TOTAL A PAGAR R$ 56,17

Previsão da Próxima Leitura em: 28/03/2011

CONHEÇA A QUALIDADE DA ÁGUA QUE VOCÊ RECEBE.
ACESSE WWW.CESAN.COM.BR

Atendimento ao Cliente

RUA CABO AILSON SIMOES, 952 TEL - 115 8h às 16h

Qualidade da Água

Parâmetro	Cor (UH)	Turbidez (UT)	pH	Flúor (mg/L)	Cloro Residual (mg/L)	Coliformes Totais amostras positivas
Resultados Média mês ant.	8,7	2,8	6,9	0,8	1,3	3,0
Padrão Qualidade*	Máx. 15	Máx. 5	6,0 a 9,0	Máx. 1,5	Mín. 0,2	(**)

Observações no verso

82000000000-0 50000000000-0 13000000000-0 0000000000-0

CESAN Qualidade em Saneamento
CNPJ: 28.151.363/0001-47

Matrícula		Vencimento
014125-0		12/03/2011
Mês/Ano	Origem	Total a pagar R$
02/2011	01	56,17

Pág. 63

Atividades

Vamos levantar algumas questões a respeito da conta apresentada:

a. Qual o valor a ser pago pelo consumidor?

b. Qual o mês em que foi consumida a água cobrada na conta?

c. Qual a data de vencimento da conta?

d. Quantos m^3 (metros cúbicos) foram consumidos no mês em questão?

e. Em que data foi feita a medição?
f. Em relação ao mês anterior, houve aumento ou redução do consumo? Quanto?
g. Entre os meses apresentados no histórico de consumo, qual foi o que teve o maior e o menor consumo? Quais foram esses consumos?
h. Considerando os meses citados na conta, qual é a média mensal de consumo do Sr. Pedro Vasconcelos de Mileto?

*****

A CESAN, assim como as demais concessionárias de água e esgoto do Brasil, efetua suas cobranças de acordo com o consumo em metros cúbicos. Veja as tarifas de consumo de água, cobradas pela concessionária em questão, para uma das categorias:
Neste ponto há uma tabela. Consulte o tutor.

Pág. 64

O consumo mínimo faturável indica que, mesmo que se consuma uma quantidade menor, será cobrado um valor correspondente a 10 m3.

• Assim, se o consumo de uma pessoa é de 8m3 no setor residencial padrão, isto significa que a pessoa deverá pagar 10 x 1,93 = 19,30 reais pelos metros cúbicos de água consumida. Isto, é R$19,30 pelos m3 de água consumida no período, pois 10 é o consumo mínimo faturável.

• Se foram consumidos 35 m3 no setor Padroo Superior, a pessoa pagará:

35 x 4,27 = 149,45, isto é R$149,45 pelos metros cúbicos consumidos.
******

Atividade 1

Agora responda:
a. Preencha a tabela a seguir de acordo com o

consumo e a categoria. (caso queira, utilize a calculadora para os cálculos).

Categorias	Consumo m^3	Cálculo	Valor a ser cobrado (R$)
Residencial Social	7		
Residencial Padrão	7		
Comércio Peq. A	7		
Residencial Social	12		
Residencial	12		

Padrão			
Comércio Peq. A	12		
Residencial Padrão	25		
Comércio Peq. A	25		
Residencial Padrão	47		
Comércio Peq. A	47		

b. Se a CESAN oferecesse um desconto de R$ 10,00 nas contas, como poderíamos representar o valor a ser pago em função do consumo x

para cada residência padrão situada na faixa (16 – 30)?
******

Pág. 65
Situação problema 2
Noção intuitiva de Função

Nas atividades resolvidas anteriormente, observe que há uma clara relação de dependência entre o valor a ser pago e o consumo em m3. Neste caso, dizemos que o valor depende do consumo ou ainda que o valor a ser pago é função do consumo. Escreva nas linhas a seguir cinco outros casos que aconteçam na sua vida cotidiana que, à semelhança com esse, apresentem situação onde um valor dependa de alguma outra medida.

Algumas possibilidades:

Atividade

Situação	Relação de dependência
	Coluna A
Controle de energia elétrica	Valor a ser pago no final de um mês
Conta de água	Valor a ser pago no final de um mês

Relação de dependência		
Coluna A		Coluna B
Valor a ser pago no final de um mês	depende do(a)	Quantidade de energia elétrica consumida no mês
Valor a ser pago no final de um mês	depende do(a)	Quantidade de água consumida no mês
	depende	

	do(a)	
	depende do(a)	
	depende do(a)	
	depende do(a)	

******

Pág. 66

Importante

Observe agora a tabela como você preencheu. Os termos, palavras ou expressões que você escreveu na coluna da direita (B) são denominados Variáveis

Independentes, já as da coluna (A) são as Variáveis Dependentes.
******

Atividade 2

Uma função pode ser representada essencialmente por uma tabela, um gráfico ou uma fórmula matemática. Observe, por exemplo, a tabela a seguir, contendo a medida do lado (em centímetros) de um quadrado e o seu perímetro (em

centímetros)
correspondente:

Importante

Lembre-se que perímetro é a soma da medida dos lados de um quadrado!

******

Lado (cm)	1	1,5	2	2,4	3	6
Perímetro (cm)	4	6	8	9,6	12	24

Neste ponto há uma figura. Consulte o tutor.

Perceba que lado e perímetro são duas variáveis, e que para cada valor do lado há apenas um valor correspondente para o perímetro. Responda às questões:

1. É possível haver dois quadrados que tenham diferentes medidas de lados entre si, mas que possuam o mesmo perímetro? Justifique.
2. Qual variável é dada em função da outra?
3. Qual é a variável dependente?

Pág. 67

4. E a variável independente?
5. Qual é a fórmula matemática que associa a medida do lado (ℓ) com o perímetro (p)?
6. Qual é o perímetro de um quadrado de lado igual a 8 cm?
7. Qual é a medida do lado do quadrado cujo perímetro é de 28 cm?
8. Assinale os valores que poderiam ser a medida do lado de um quadrado:

3 -4 $\frac{2}{5}$ 2,3 -10,6 0

1,333 $\sqrt{5}$

9 Escreva como você falaria para alguém qual o domínio da função que relaciona o lado do quadrado a seu perímetro.

10. Dos valores assinalados no item VIII, qual seria o valor do perímetro do quadrado associado a cada um deles?

Lado	Perímetro

Os valores assinalados no item anterior pertencem ao domínio da função que relaciona um quadrado ao seu lado. O Domínio da função pode, então, ser definidio como o conjunto de todos os valores possíveis de serem atribuídos à variável independente de uma função.

Importante

Como não é possível obter o valor do perímetro sem antes conhecer o valor do lado do quadrado, dizemos que o valor do perímetro é uma variável dependente porque depende que conheçamos primeiro o valor do lado do quadrado.

O conjunto dos valores do perímetro, calculados no item anterior, é denominado de imagem da função. Portanto, imagem é o conjunto de todos os valores possíveis de serem atribuídos à variável dependente.

******

Pág. 68

Atividades

A variável independente é, usualmente, representada pela letra x, enquanto a variável dependente é representada pela letra y. Ou seja, y é o valor que não conhecemos que depende de x.

Portanto, normalmente é possível escrever que y é função de x ou, simplesmente, $y = f(x)$.

Retomando a tabela anterior que relaciona o lado e perímetro de um quadrado, veja como ela poderia ser reescrita, considerando x a medida do lado do quadrado e y o perímetro:

x	y	
1	4	f(1)=4
1,5	6	f(1,5)=6
2	8	f(2)=8
2,4	9,6	f(2,4)=9,6
3	12	f(3)=12
6	24	f(6)=24

Agora, calcule:

a. f (3,5) =

b. f (10) =

c. f =

Pág. 69

Você sabia que o cálculo de uma corrida de táxi, sem levar em conta os quilômetros parados, é dado por uma função do primeiro grau?

Vejamos as tarifas de táxi da cidade do Rio de Janeiro.

Evento	Valor
Bandeirada (valor mínimo)	R$ 4,30
Quilômetro rodado Tarifa I	R$ 1,40
Quilômetro rodado Tarifa II	R$ 1,68
Hora parada ou de espera	R$ 17,64
Para cada mala ou pacote	R$ 1,40

medindo mais de 60 cm X 30 cm	

Observação: A tarifa I é vigente das 6h às 21h, nos dias úteis (segunda-feira a sábado). A tarifa II é praticada no período noturno de segunda-feira a sábado, das 21h às 6h e nos domingos e feriados, sem discriminação horária, e nas subidas íngremes, sem discriminação horária.

Esses dados são fornecidos pela Secretaria de Transporte do Rio de Janeiro.

Isto significa que toda corrida de táxi sempre começa a contar a partir de R$ 4,30 (quatro reais e trinta centavos). Este valor é chamado de bandeirada. A partir deste valor são adicionados valores por quilômetro rodado. Cada quilômetro (km) rodado na tarifa I será adicionado um valor de R$ 1,40 (um real e quarenta centavos) e para a tarifa II o valor de R$ 1,68 (um real e sessenta e oito centavos) por km rodado.

Mas a corrida sempre dará um valor um pouco maior, porque toda a vez que o táxi para num semáforo ou fica preso no trânsito ou outras situações em que o carro fica parado, é acrescido um valor proporcional à hora parada. O valor de uma hora parada é de

R$ 17,64. Isto significa que se durante a corrida o carro ficar parado por 5 minutos a corrida será acrescida em R$ 1,47 (um real e quarenta e sete centavos).

Atividade 3

Com base nesses dados responda às perguntas a seguir:

1. Se você fizer uma corrida de 8 km em um dia útil antes das 21 horas, quanto ela custará?

2. Se durante esta corrida de 8 Km, o carro ficou parado por 5 minutos e o passageiro transportava uma maleta cuja menor face media mais que 60cm x 30cm, de quanto foi o valor pago ao taxista?

******

Pág. 70

3. Quais das expressões abaixo representariam a situação de um táxi que rodou x quilômetros, sendo P(x) o valor a ser

pago em reais e durante a tarifa I. Sem considerar que o táxi ficou parado em algum momento.

a. P(x) = 1,40 . x

b. P(x) = 4,30 . x

c. P(x) = 4,30 + 1,40 . x

d. P(x) = 1,40 + 4,30 . x

4. Se você fizer uma corrida de 6 km num dia útil, depois das 21 horas, quanto ela lhe custará?

5. Se durante a situação acima, na tarifa II, o carro ficar parado por 12 minutos, a corrida será acrescida de quanto?

******

Saiba Mais

Nem toda relação entre duas variáveis é uma função. Para que seja uma função, é necessário que haja apenas um valor (imagem) relacionado com cada um dos elementos do domínio. Ou seja, cada valor do domínio aponta apenas para um caminho ou relação possível. Vamos a um exemplo. A hora do dia depende da posição dos ponteiros do relógio.

1º Caso: Utilizando relógio que marque 24 horas.

Cada posição dos ponteiros aponta para apenas uma hora do dia. Portanto, neste caso, podemos afirmar que a hora do dia é função da posição dos ponteiros do relógio.

2º Caso: Utilizando relógio que marque 12 horas.

Cada posição dos ponteiros aponta para duas possibilidades de horas do dia. A posição da figura, por exemplo, pode estar apontando tanto para 1h47min quanto para 13h47min.

Portanto, neste caso, não temos uma função.

Pág. 71

Momento de reflexão

Nesta Unidade, iniciamos o estudo de Funções.

Como você pode perceber, não basta duas variáveis terem alguma relação estabelecida para configurar uma função. Reflita sobre as situações que vivenciamos na unidade e pense nisto.

Liste algumas relações entre variáveis que você conheça e diga em qual das situações as relações apresentadas constituem funções entre duas variáveis. Por quê?

Voltando à conversa inicial

Nesta Unidade, você viu que duas variáveis podem se relacionar de maneira que esta relação seja uma função. As representações dessas situações foram apresentadas por meio de tabelas ou fórmulas, mas podemos representá-las também a partir de um gráfico.

Vimos que o Domínio da Função é o conjunto dos valores possíveis de serem atribuídos à variável independente e o conjunto de valores possíveis para a variável dependente é denominado Imagem da Função. Para que seja realmente uma função, todo elemento do domínio tem de ter uma e somente uma imagem. Isto é, uma relação entre duas variáveis é uma função, se cada valor da variável independente determina um, e somente um, valor da variável dependente.

Voltando agora ao problema inicial

Banco S.A.	
Pagável em qualquer agência bancária até a data do vencimento	Vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de	Agência/código

Ensino Médio	
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(*) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso	(-) Descontos
	(-) Outras deduções
	(+) Mora/multa
	(+) Outros acréscimos
	(*) Valor cobrado

Pág. 72

Observe que há um valor fixo, R$500,00 que, caso haja atraso é acrescido de R$10,00 mais 40 centavos por dia, dessa forma a expressão que melhor representa a função é M(x)=510 + 0,4x, que corresponde à letra C.

Veja ainda

As funções são utilizadas em várias áreas. No comércio, sua utilização dá-se no cálculo de demanda, oferta, custos, lucro etc. Vejamos um exemplo:

Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz.

O custo total para fabricar uma quantidade q de produtos é dado por uma função, que comumente representamos pela letra C, enquanto que o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade q é também uma função, que podemos representar pela letra F. O lucro total L, obtido pela venda da quantidade q de produtos, é dado pela expressão $L(q) = F(q) – C(q)$, isto é, pela diferença entre o faturamento e o custo de fabricação.

Dadas as funções F = 6q, por exemplo, e C= 2q + 12, podemos calcular a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo.

Como $L(q) = F(q) – C(q)$

Temos que $L(q) = 6q – (4q + 12) = 4q – 12$

Para que não haja prejuízo, este valor tem de ser maior que zero.

Observando, verificamos que isto ocorre se **q for maior que 3**, pois 3 x 4 =12.

Referências

.TINOCO, L. A. A. Álgebra: Estudo e Ensino.

Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática, (2008). (Projeto Fundão)

.TINOCO, L. A. A. Construindo o conceito de função. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática, (2009). (Projeto Fundão)

.Site: www0.rio.rj.gov.br/smtu/smtu/smtu_tarif_tax.htm, acesso em 05/04/2012.

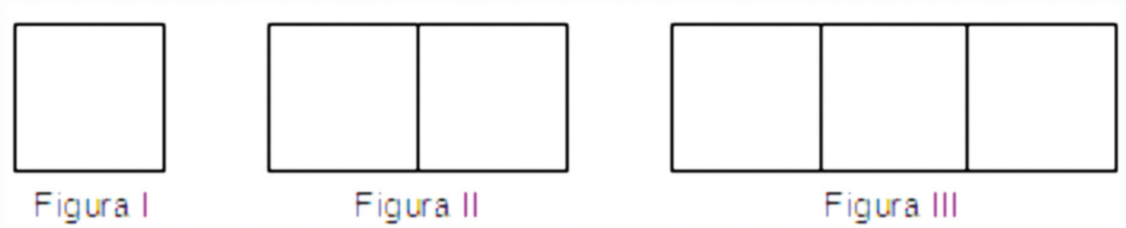
.Site: www. MEC.inep.br

Pág. 75

O que perguntam por aí?

Atividade 1 (ENEM, 2010, questão 14)

Uma professora realizou uma atividade com seus alunos, utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.



Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

a. C = 4Q
b. C = 3Q + 1
c. C = 4Q - 1
d. C = Q + 3
e. C = 4Q – 2

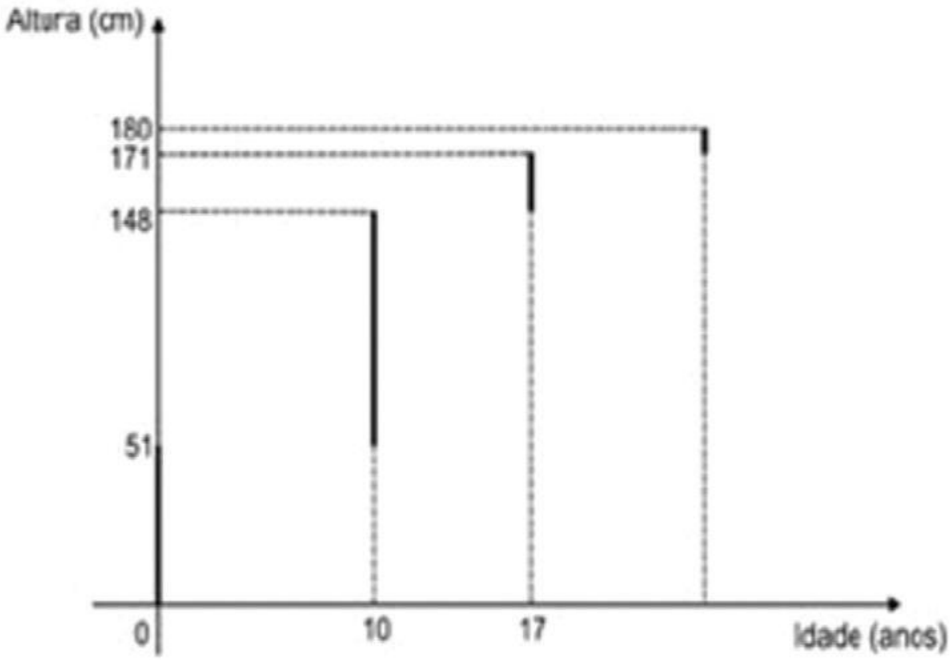
Atividade 2 (ENEM, 2010, questão 7)

Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura dava-se de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível. Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico, relacionando as alturas do filho nas idades consideradas.

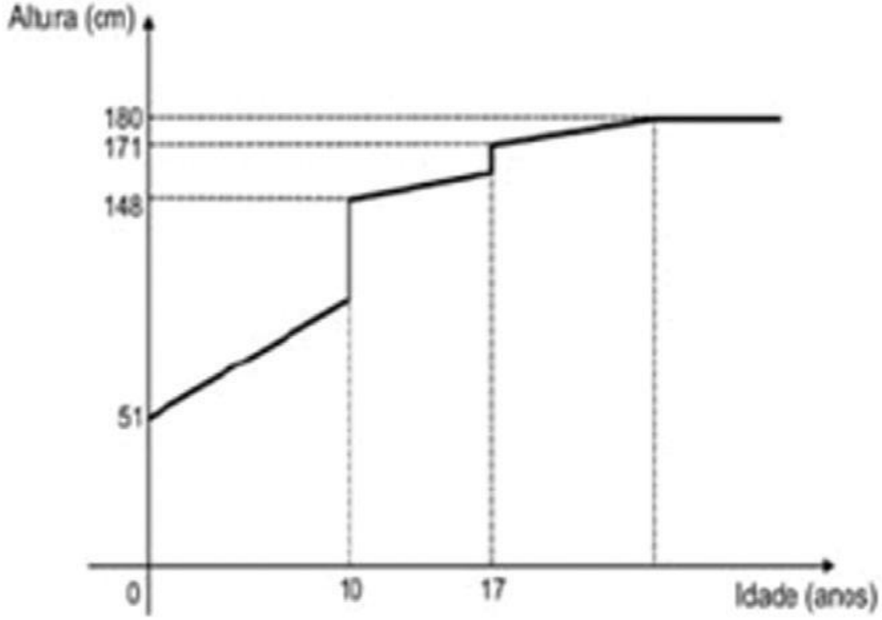
Pág. 76

Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?

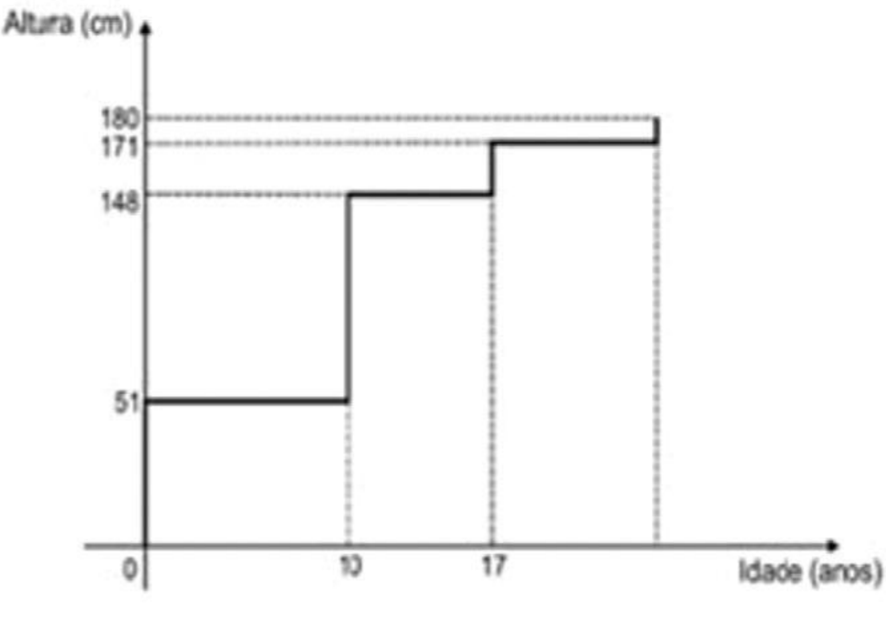
c)


Altura (cm)
180
171
148
51
0
10
17
Idade (anos)

d)


Altura (cm)
180
171
148
51
0
10
17
Idade (anos)

e)


Altura (cm)
180
171
148
51
0
10
17
Idade (anos)

Pág. 77

SITUAÇÃO PROBLEMA 1

a. R$ 56,17.

b. Fevereiro de 2010.

c. 12/03/2010.

d. 26 m^3.

e. 28/02/2010.

f. Houve redução de 29 m^3 para 26 m^3.

g. Maior – setembro de 2006. 30 m^3.

h. Menor – agosto de 2006. 12 m^3.

i. 25,4 m^3, considerando os consumos de agosto de 2009 até fevereiro de 2010.

Pág. 78

Respostas das atividades

Atividade 1

Categorias	Consumo m^3	Cálculo	Valor a ser cobrado (R$)
Residencial Social	7	10x 0,77	7,70
Residencial Padrão	7	10x 1,93	19,30
Comércio Peq. A	7	10x 3,06	30,60

Residencial Social	12	12x 0,77	9,24
Residencial Padrão	12	12x 1,93	23,16
Co95,75m ércio Peq. A	12	12x 3,06	36,72
Residencial Padrão	25	25x 3,83	96,75
Comércio Peq. A	25	25x 4,71	111,75
Residencial Padrão	47	47x 4,27	200,69
Comércio Peq. A	47	47x 4,71	221,37

b. O valor a ser pago em função do consumo x para cada residência padrão situada na faixa (16 – 30) poderia ser representado por 3,83x – 10.

Situação problema 2

Situação	Relação de dependência
	Coluna A
Controle de energia elétrica	Valor a ser pago no final de um mês
Conta de água	Valor a ser pago no final de um mês
Conta de táxi	Valor a ser pago no final da corrida

Consumo de combustível	Quantidade de combustível consumido
Tinta da impressora	Quantidade de tinta utilizada
Músicas armazenadas no MP3	Quantidade de músicas armazenadas

Relação de dependência		
Coluna A		Coluna B
Valor a ser pago no	depende do(a)	Quanti-dade de energia

final de um mês		elétrica consu-mida no mês
Valor a ser pago no final de um mês	depende do(a)	Quanti-dade de água consu-mida no mês
Valor a ser pago no final da corrida	depende do(a)	Quanti-dade de quilô-metros rodados
Quanti-dade de	depende do(a)	Quanti-dade de

com-bustível consu-mido		quilô-metros rodados pelo veículo
Quantid ade de tinta utilizada	depende do(a)	Quanti-dade de páginas impres-sas
Quanti-dade de músicas arma-zenadas	depende do(a)	Quanti-dade de memó-ria disponí-vel

Pág. 79

parei aqui

Atividade 2

1. Não. Pois se o perímetro de um quadrado é a soma da medida dos lados e se os lados dos quadrados têm medidas distintas, os perímetros serão diferentes.

2. O perímetro é dado em função do lado.

3. Perímetro

4. Tamanho do lado

5. p = 4l.

6. 32 cm

7. 7 cm

8.

3 -4 25 2,3 -10,6 0 1,333 5

9. Poderíamos dizer que o perímetro da função que relaciona o lado do quadrado a seu perímetro é formado por todos os valores positivos.

10.

Lado	**Perímetro**
3 cm	12 cm
2/5 cm	8/5 cm
2,3 cm	9,2 cm
1,333 cm	5,332 cm
cm	4 cm